

# **Eine Theorie der behinderten radialen Aufweitung am stirnseitig befestigten Freilauf**

## **Dissertation**

zur Erlangung des Doktorgrades  
der Ingenieurwissenschaften

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Sebastian Hofmann  
aus Marktredwitz

genehmigt von der Fakultät für Mathematik/Informatik und Maschinenbau  
der Technischen Universität Clausthal

Tag der mündlichen Prüfung  
18.03.2019

Vorsitzender der Prüfungskommission: Prof. Dr.-Ing. Volker Wesling

Hauptberichterstatter: Prof. Dr.-Ing. Armin Lohrengel

Mitberichterstatter: Prof. Dr.-Ing. Karl-Heinrich Grote

Dissertation Technische Universität Clausthal 2019

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>VII</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>XV</b>
<b>Verwendete Größen und Indizes</b>	<b>XVII</b>
<b>Verzeichnis verwendeter Abkürzungen</b>	<b>XXVII</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>XXIX</b>
<b>Abstract</b>	<b>XXXIII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Funktionsprinzip kraftschlüssiger Freiläufe . . . . .	2
1.2 Der stirnseitig befestigte Freilauf . . . . .	8
1.3 Problemstellung . . . . .	8
1.4 Zielsetzung . . . . .	9
<b>2 Stand der Technik</b>	<b>11</b>
2.1 Einordnung in den Stand der Technik und Forschung . . . . .	11
2.2 Berechnung quer belasteter Schraubenverbindungen . . . . .	13
2.2.1 Berechnung nach VDI 2230 . . . . .	14
2.2.2 Berechnung nach DIN EN 1993 (Eurocode 3) . . . . .	21
<b>3 Grundlagen der Technischen Mechanik</b>	<b>31</b>
3.1 Rotationssymmetrische Körper . . . . .	31
3.1.1 Räumlicher Spannungszustand . . . . .	31
3.1.2 Räumlicher Verzerrungszustand . . . . .	32

3.1.3	Kinematische Beziehungen am zylindrischen Volumenelement . . . . .	34
3.1.4	Verträglichkeitsbedingungen . . . . .	35
3.1.5	Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	35
3.2	Randwertproblem der Technischen Mechanik . . . . .	36
3.3	Prinzip der virtuellen Arbeit . . . . .	38
3.3.1	Vorzeichendefinition an rotationssymmetrischen Körpern . . . . .	38
3.3.2	Kraftgrößenverfahren . . . . .	39
3.4	Kreisring mit Rechteckquerschnitt . . . . .	41
3.4.1	Kreisring unter rotationssymmetrischen Schwerpunktlasten . . . . .	41
3.4.2	Kreisring unter beliebiger rotationssymmetrischer Belastung . . . . .	44
3.5	Schalentheorie . . . . .	47
3.5.1	Dünne Schalen . . . . .	47
3.5.2	Membrantheorie . . . . .	48
3.5.3	Biegetheorie der langen Zylinderschale . . . . .	50
3.5.4	Biegetheorie der kurzen Zylinderschale . . . . .	56
3.5.5	Berechnung des Aufweitungsverlaufs . . . . .	59
3.5.6	Dicke Schalen . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Analytisches Modell</b>	<b>65</b>
4.1	Reibkegel der stirnseitigen Verbindung . . . . .	65
4.2	Kräfte an der stirnseitigen Verbindung . . . . .	66
4.3	Relative Übertragbarkeit . . . . .	68
4.3.1	Einfluss des Klemmwinkels . . . . .	71
4.3.2	Einfluss des Lochkreises . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Methoden zur Abschätzung der radialen Zusatzkräfte</b>	<b>75</b>
5.1	FE-Modelle . . . . .	76
5.1.1	3D-FE-Vollmodell . . . . .	77
5.1.2	2D-FE-Modell . . . . .	84
5.1.3	Vereinfachtes 2D-FE-Modell . . . . .	88
5.2	Einfaches Federmodell . . . . .	93
5.3	Kombiniertes Kreisring-Schalenmodell . . . . .	101
5.3.1	Kraftgrößenverfahren am Schalen-Scheibenmodell . . . . .	104
5.3.2	Erweiterung des Schalen-Scheibenmodells um eine Kreisringscheibe . . . . .	106



5.3.3	Aufstellen der Formänderungsmatrix am Beispiel einer Kreisringscheibe . . . . .	108
5.3.4	Aufbau der Gesamtelastizitätsmatrix . . . . .	111
5.3.5	Aufbau des LGS für das Kraftgrößenverfahren . . . . .	113
5.3.6	Lösung des linearen Gleichungssystems . . . . .	115
5.4	Bewertung der Methoden . . . . .	118
5.5	Beispielrechnung . . . . .	126
<b>6</b>	<b>Experimentelle Untersuchungen</b>	<b>131</b>
6.1	Reibwertuntersuchungen . . . . .	131
6.1.1	Aufbau des Reibwertprüfstands . . . . .	131
6.1.2	Untersuchte Prüflinge . . . . .	134
6.1.3	Durchführung und Auswertung der Reibversuche . . . . .	135
6.1.4	Ergebnisse der Reibversuche . . . . .	137
6.2	Erfassung der Schraubenvorspannung . . . . .	142
6.2.1	Voruntersuchungen zur Erfassung der Schraubenvorspan- nung . . . . .	143
6.2.2	Weiterentwicklung des Messverfahrens in [Cho16] . . . . .	147
6.2.3	Ergebnisse der Untersuchungen in [Cho16] . . . . .	153
6.2.4	Mögliche zukünftige Weiterentwicklung des Messverfahrens	157
6.3	Schrauben-Freilauf-Prüfstand . . . . .	160
6.4	Experimenteller Nachweis der behinderten radialen Aufweitung . . .	163
6.4.1	Rutschversuche zum Nachweis der relativen Übertragbarkeit	164
6.4.2	Messung der radialen Aufweitung . . . . .	170
6.5	Scherversuch am Freilauf <i>Modell 1</i> . . . . .	183
<b>7</b>	<b>Gestaltungshinweise</b>	<b>185</b>
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>195</b>
<b>9</b>	<b>Ausblick</b>	<b>201</b>
9.1	Flanschverbindungen an Druckbehältern und Rohren unter Innen- druck . . . . .	201
9.2	Schraubenbeanspruchung infolge der behinderten radialen Aufwei- tung . . . . .	202
9.3	Ansätze zur Verbesserung des kombinierten Kreisring- Schalenmodells . . . . .	205

9.3.1	Erweiterung des Kreisring-Schalenmodells um weitere Querschnittsformen . . . . .	205
9.3.2	Berücksichtigung der Querkraftverformungen . . . . .	207
9.3.3	Verwendung anderer Berechnungsmethoden für die Formänderungswerte . . . . .	215
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>217</b>
<b>A Mathematische Grundlagen</b>		<b>225</b>
A.1	Numerische Ableitung . . . . .	225
<b>B Daten der Designpoints</b>		<b>227</b>

## Abbildungsverzeichnis

Abb. 1.1: Klemmrollenfreilauf mit Innenstern . . . . .	3
Abb. 1.2: Klemmkörperfreilauf . . . . .	4
Abb. 1.3: Kräfte an der Klemmrolle . . . . .	4
Abb. 1.4: Beispielhafter Klemmwinkelverlauf für einen Klemmrollenfreilauf, aufgetragen über das auf das Freilaufgrenzmoment bezogene Drehmoment . . . . .	5
Abb. 1.5: Kräfte am kraftschlüssigen Freilauf . . . . .	7
Abb. 1.6: Stirnseitig befestigter Freilauf . . . . .	8
Abb. 1.7: Schraube am Freilaufaußenring nach Montage . . . . .	9
Abb. 1.8: Einseitige Anlage der Schraube am Freilaufaußenring unter Drehmomentbelastung . . . . .	9
Abb. 2.1: Systematik querbelasteter Schraubenverbindungen nach [VDI14b] . . . . .	13
Abb. 2.2: Modellvorstellung einer Schraubenverbindung (Federnmodell) . . . . .	14
Abb. 2.3: Grundlegende Vorgehensweise zur analytischen Berechnung von Mehrschraubenverbindungen . . . . .	17
Abb. 2.4: In Schraubenloch hineinragendes Gewinde einer Passschraube nach [EC3a] . . . . .	24
Abb. 2.5: Bezeichnung der Rand- und Lochabstände nach [EC3a] . . . . .	25
Abb. 2.6: Ermüdungsfestigkeitskurve für Schubspannungsschwingbreiten nach [EC3b] . . . . .	27
Abb. 3.1: Spannungskomponenten an einem infinitesimalen zylindrischen Volumenelement . . . . .	32
Abb. 3.2: Körper mit Verschiebungs- und Spannungsrandbedingungen in einem Kraftfeld . . . . .	37

Abb. 3.3: Vorzeichendefinition an rotationssymmetrischem Körper mit Randlasten am rechten (positiven) Rand . . . . .	39
Abb. 3.4: Kreisringscheibe mit Schwerpunktlasten . . . . .	42
Abb. 3.5: Kreisringscheibe mit beliebigen rotationssymmetrischen Lasten	45
Abb. 3.6: Zylinderschale im Membranzustand nach [HM01] . . . . .	49
Abb. 3.7: Zylinderschale im Biegezustand nach [HM01] . . . . .	52
Abb. 3.8: Verhältnis der Wanddicke $H$ zum mittleren Radius $r_S$ verschiedener zur stirnseitigen Befestigung vorgesehener Radialfreiläufe der STIEBER GMBH [Sti] und RINGSPANN GMBH [Rin], aufgetragen über der Bauraumkenngroße . . . . .	63
Abb. 4.1: Reibkegel für die stirnseitige Verschraubung . . . . .	66
Abb. 4.2: Freilaufaußenring mit Klemm- und Verschraubungskräften . . .	67
Abb. 4.3: Relative Übertragbarkeit $\beta_R$ für $C_D = 1,2$ und $\alpha_K = 4^\circ$ . . . . .	71
Abb. 4.4: Relative Übertragbarkeit $\beta_R$ unter Variation von $\alpha_K$ für $C_D = 1,2$	72
Abb. 4.5: Relative Übertragbarkeit $\beta_R$ unter Variation von $C_D$ für $\alpha_K = 4^\circ$	73
Abb. 4.6: Lochkreisverhältnis $C_D$ am Freilaufaußenring . . . . .	73
Abb. 5.1: Methoden zur Abschätzung des Kräfteverhältnisses $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$ . . . . .	75
Abb. 5.2: Prüfstand für stirnseitig befestigte Freiläufe . . . . .	77
Abb. 5.3: betrachtete Körper für 3D-FE-Vollmodell . . . . .	78
Abb. 5.4: 2D-FE-Modell des Freilaufs <i>Modell 1</i> in Versuchskonfiguration mit fester Einspannung des Festlagerbocks . . . . .	85
Abb. 5.5: 2D-FE-Modell des Freilaufs <i>Modell 1</i> in Versuchskonfiguration mit gelenkiger Einspannung des Festlagerbocks an oberer Kante	86
Abb. 5.6: 2D-FE-Modell des Freilaufs <i>Modell 1</i> mit Anschlussflansch in Versuchskonfiguration mit fester Einspannung im ehemaligen Kontaktbereich mit dem Festlagerbock . . . . .	87
Abb. 5.7: Vereinfachtes 2D-FE-Modell des stirnseitigen Verbunds von Freilauf und Flansch mit verschiedenen Lagerungsbedingungen . . . . .	89
Abb. 5.8: Referenz-Kräfteverhältnisse als Ergebnis des vereinfachten 2D-FE-Modells unter Variation der Flanschbreite $b_{FL}$ am stirnseitigen Verbund des Freilaufs <i>Modell 1</i> . . . . .	90
Abb. 5.9: Referenz-Kräfteverhältnisse als Ergebnis des vereinfachten 2D-FE-Modells unter Variation des Flanschaußendurchmessers $D_{FL}$ am stirnseitigen Verbund des Freilaufs <i>Modell 1</i> . . .	91

Abb. 5.10: Referenz-Kräfteverhältnisse als Ergebnis des vereinfachten 2D-FE-Modells unter Variation des Flanschinnendurchmessers $d_{FL}$ am stirnseitigen Verbund des Freilaufs <i>Modell 1</i> . . . .	92
Abb. 5.11: Referenz-Kräfteverhältnisse als Ergebnis des vereinfachten 2D-FE-Modells unter Variation der Klemmbreite $b_K$ am stirnseitigen Verbund des Freilaufs <i>Modell 1</i> . . . . .	93
Abb. 5.12: Referenz-Kräfteverhältnisse als Ergebnis des vereinfachten 2D-FE-Modells für die optimalen Parameterkombinationen der jeweiligen Freilaufmodelle bei fester und loser Einspannung . .	94
Abb. 5.13: Referenz-Kräfteverhältnisse als Ergebnis des vereinfachten 2D-FE-Modells für verschiedene Designpoints . . . . .	95
Abb. 5.14: Modellvorstellung am stirnseitig befestigten Freilauf . . . . .	96
Abb. 5.15: Freischnitt am stirnseitig befestigten Freilauf . . . . .	96
Abb. 5.16: Parallelschaltung zweier Federn . . . . .	99
Abb. 5.17: Kräfteverhältnisse als Ergebnis des einfachen Federmodells (Starrkörpermodell) im Vergleich zu den Ergebnissen des vereinfachten 2D-FE-Modells (Referenz) für verschiedene Designpoints . . . . .	100
Abb. 5.18: Modellvorstellung des stirnseitig befestigten Freilauf-Flanschverbunds . . . . .	102
Abb. 5.19: Schalen-Scheibenmodell des stirnseitig befestigten Freilaufs . . . . .	105
Abb. 5.20: Schalen-Kreisring-Scheibenmodell des stirnseitig befestigten Freilaufs . . . . .	106
Abb. 5.21: Kreisringscheibe mit statisch unbestimmten Schnittlasten . . . . .	107
Abb. 5.22: Aufbau der Gesamtelastizitätsmatrix . . . . .	112
Abb. 5.23: Kräfteverhältnisse $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$ als Ergebnis des kombinierten Kreisring-Schalenmodells (kKS) im Vergleich zu den Ergebnissen des vereinfachten 2D-FE-Modells (Referenz) für verschiedene Designpoints und Einspannsituationen des Flanschkörpers . . . . .	117
Abb. 5.24: Kräfteverhältnisse $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$ als Ergebnis des kombinierten Kreisring-Schalenmodells (kKS) im Vergleich zu den Ergebnissen des vereinfachten 2D-FE-Modells (Referenz) und relative Abweichung der Ergebnisse des kKS zum Ergebnis des 2D-FE-Referenzmodells für verschiedene Designpoints bei einer festen Einspannung des Anschlussflanschs . . . . .	119

Abb. 5.25: Kräfteverhältnisse $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$ als Ergebnis des kombinierten Kreisring-Schalenmodells (kKS) im Vergleich zu den Ergebnissen des vereinfachten 2D-FE-Modells (Referenz) und relative Abweichung der Ergebnisse des kKS zum Ergebnis des 2D-FE-Referenzmodells für verschiedene Designpoints bei einer gelenkigen Einspannung des Anschlussflansch . . . . .	120
Abb. 5.26: Kräfteverhältnisse $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$ als Ergebnis des kombinierten Kreisring-Schalenmodells (kKS) im Vergleich zu den Ergebnissen des vereinfachten 2D-FE-Modells (Referenz) und relative Abweichung der Ergebnisse des kKS zum Ergebnis des 2D-FE-Referenzmodells für verschiedene Designpoints bei einer losen Führung des Anschlussflanschs . . . . .	121
Abb. 5.27: Relative Übertragbarkeiten $\beta_R(\alpha_K = 3^\circ)$ als Ergebnis des kombinierten Kreisring-Schalenmodells (kKS) im Vergleich zu den Ergebnissen des vereinfachten 2D-FE-Modells (Referenz) und relative Abweichung der Ergebnisse des kKS zum Ergebnis des 2D-FE-Referenzmodells für verschiedene Designpoints bei einer festen Einspannung des Anschlussflanschs . . . . .	122
Abb. 5.28: Relative Übertragbarkeiten $\beta_R(\alpha_K = 3^\circ)$ als Ergebnis des kombinierten Kreisring-Schalenmodells (kKS) im Vergleich zu den Ergebnissen des vereinfachten 2D-FE-Modells (Referenz) und relative Abweichung der Ergebnisse des kKS zum Ergebnis des 2D-FE-Referenzmodells für verschiedene Designpoints bei einer gelenkigen Einspannung des Anschlussflansch . . . . .	123
Abb. 5.29: Relative Übertragbarkeiten $\beta_R(\alpha_K = 3^\circ)$ als Ergebnis des kombinierten Kreisring-Schalenmodells (kKS) im Vergleich zu den Ergebnissen des vereinfachten 2D-FE-Modells (Referenz) und relative Abweichung der Ergebnisse des kKS zum Ergebnis des 2D-FE-Referenzmodells für verschiedene Designpoints bei einer losen Führung des Anschlussflanschs . . . . .	124
Abb. 5.30: Technische Zeichnung des stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf <i>Modell 1</i> mit Ersatzkörpern für die Berechnung nach dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell . . . . .	127

Abb. 6.1: Schematischer Aufbau des Reibprüfstands des IMW . . . . .	132
Abb. 6.2: Reibprüfstands des IMW . . . . .	133
Abb. 6.3: Gegenüberstellung Freilauf vs. Dummy . . . . .	135
Abb. 6.4: Exemplarischer Verlauf des Reibbeiwerts . . . . .	136
Abb. 6.5: Haftreibwerte für <i>Modell 1</i> . . . . .	138
Abb. 6.6: Haftreibwerte für <i>Modell 2</i> . . . . .	139
Abb. 6.7: Haftreibwerte für <i>Dummy 1</i> . . . . .	140
Abb. 6.8: Haftreibwerte für <i>Dummy 2</i> . . . . .	141
Abb. 6.9: DMS-Messschrauben mit Linear-DMS und Membran-DMS . . . .	144
Abb. 6.10: Einfache Kalibriereinrichtung für DMS-Messschrauben . . . .	145
Abb. 6.11: Radialdehnungen am Schraubenkopf einer zentrisch vorge- spannten Schraubenverbindung mit einer Sechskantschraube nach DIN EN ISO 4014 [ISO4014] und mittlerem Durchgangs- loch nach DIN EN 20273 [EN20273] . . . . .	145
Abb. 6.12: Ergebnisse der Vorversuche mit Membran- und Linear-DMS auf abgeschliffenen Schraubenköpfen von M10-Schrauben nach DIN EN ISO 4014 . . . . .	146
Abb. 6.13: Membran-DMS vs. Referenz-Kraftmessdose im Zeitverlauf . .	148
Abb. 6.14: Skizze des in [Cho16] verwendeten FE-Modells mit den unter- suchten Geometrieparametern . . . . .	149
Abb. 6.15: Explosionsdarstellung der in [Cho16] konstruierten und ver- wendeten Schraubenkalibriereinrichtung . . . . .	152
Abb. 6.16: Draufsicht auf die Schraubenkalibriereinrichtung mit M8 DMS- Messschraube mit einfachem Linear-DMS vom Typ C2A- 06-062LW-350 der Firma Micro-Measurements (VISHAY) aus [Cho16] . . . . .	154
Abb. 6.17: Beispielhafter Zeitverlauf der Schraubenvorspannkraft wäh- rend einer Messung an einer M8-DMS-Messschraube nach [Cho16] . . . . .	154
Abb. 6.18: Messpunkte ( $V_6$ ) und daraus ergebende mittlere Empfindlich- keitsgerade $S_{\text{DMS}} \approx 0,0263 \frac{\text{mV/V}}{\text{kN}}$ mit zugehörigem Prognose- intervall (95 %) für eine frei angezogene M8 Sechskantschrau- be mit Unterlegscheibe und Linear-DMS vom Typ C2A-06- 062LW-350 auf dem Schraubenkopf bei einer mittleren Durch- gangsbohrung ( $d_h = 9 \text{ mm}$ ) (nach [Cho16]) . . . . .	155

Abb. 6.19: Messpunkte (gesamt) und daraus ergebende mittlere Empfindlichkeitsgerade  $S_{DMS} \approx 0,0262 \frac{mV}{V}$  mit zugehörigem Prognoseintervall (95 %) für frei angezogene M8 Sechskantschrauben mit Unterlegscheiben und Linear-DMS vom Typ C2A-06-062LW-350 auf dem Schraubenkopf bei einer mittleren Durchgangsbohrung ( $d_h = 9\text{ mm}$ ) (nach [Cho16]) . . . . .

156

Abb. 6.20: Radialdehnungen auf der Stirnseite einer Schraubenmutter nach DIN EN ISO 4032 [ISO4032] an einer zentrisch vorgespannten Schraubenverbindung mit einer Sechskantschraube nach DIN EN ISO 4014 [ISO4014] und mittlerem Durchgangsloch nach DIN EN 20273 [EN20273] . . . . .

159

Abb. 6.21: Intelligente sensorische Schraubenverbindung mit Dünnschicht-DMS . . . . .

159

Abb. 6.22: Zusammenbauzeichnung des Prüfaufbaus für Rutsch- und Scherversuche an stirnseitig befestigten Freiläufen mit Teilausschnitt . . . . .

161

Abb. 6.23: Prüfaufbau für Rutsch- und Scherversuche an stirnseitig befestigten Freiläufen . . . . .

162

Abb. 6.24: Prüfstand für Rutsch- und Scherversuche an stirnseitig befestigten Freiläufen mit Belastungseinrichtung und Kupplung . . .

163

Abb. 6.25: Messaufbau für Rutschuntersuchungen am stirnseitig befestigten Freilauf *Modell 1* . . . . .

165

Abb. 6.26: Rutschversuch mit Freilauf *Modell 1* - Prüfling P05 bei 75 % Vorspannung . . . . .

166

Abb. 6.27: Rutschmomente für Freilauf *Modell 1* und *Dummy 1* auf vier verschiedenen Vorspannkraftniveaus (25 %, 50 %, 75 % und 100 %) . . . . .

167

Abb. 6.28: Rutschmomente für Freilauf *Modell 1*, *Dummy 1* und reibwertangepassten *Dummy 1\** auf vier verschiedenen Vorspannkraftniveaus (25 %, 50 %, 75 % und 100 %) . . . . .

169

Abb. 6.29: Einfluss der Belastungsrichtung auf die Reibwerte geschliffener Oberflächen in Selbstpaarung (42CrMo4) (aus [Grä15]) . .

171

Abb. 6.30: Messung der Außenkontur mit einem Rauheitstaster an einem stirnseitig befestigten Freilauf *Modell 2* . . . . .

172



- Abb. 6.31: Am Freilauf *Modell 1* gemessene Aufweitung und über gleichenden Mittelwert geglätteter Verlauf der Aufweitung bei einem Drehmoment von 230 Nm . . . . . 173
- Abb. 6.32: Mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechnete Aufweitungsverläufe für den stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf *Modell 1* für die drei möglichen Einspannbedingungen des letzten Flanschkörpers in Abb. 5.30 174
- Abb. 6.33: Mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneter Aufweitungsverlauf für den stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf *Modell 1* und eine feste Einspannung des letzten Flanschkörpers in Abb. 5.30 im Vergleich zum gemessenen Aufweitungsverlauf . . . . . 175
- Abb. 6.34: Mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneter Aufweitungsverlauf für den stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf *Modell 1* und eine gelenkige Lagerung des letzten Flanschkörpers in Abb. 5.30 im Vergleich zum gemessenen Aufweitungsverlauf . . . . . 176
- Abb. 6.35: Mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneter Aufweitungsverlauf für den stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf *Modell 1* und eine reine Führung des letzten Flanschkörpers in Abb. 5.30 im Vergleich zum gemessenen Aufweitungsverlauf . . . . . 177
- Abb. 6.36: Mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell ohne Berücksichtigung des Lagerbocks berechnete Aufweitungsverläufe für den stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf *Modell 1* für die drei möglichen Einspannbedingungen des letzten Flanschkörpers . . . . . 179
- Abb. 6.37: Mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell ohne Berücksichtigung des Lagerbocks berechneter Aufweitungsverlauf für den stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf *Modell 1* und eine feste Einspannung des letzten Flanschkörpers im Vergleich zum gemessenen Aufweitungsverlauf . . . . . 180

Abb. 6.38: Mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell ohne Berücksichtigung des Lagerbocks berechneter Aufweitungsverlauf für den stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf *Modell 1* und eine gelenkige Lagerung des letzten Flanschkörpers im Vergleich zum gemessenen Aufweitungsverlauf . . . . . 181

Abb. 6.39: Mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell ohne Berücksichtigung des Lagerbocks berechneter Aufweitungsverlauf für den stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf *Modell 1* und eine reine Führung des letzten Flanschkörpers im Vergleich zum gemessenen Aufweitungsverlauf . . 182

Abb. 6.40: Abgescherte Schrauben nach dem Scherversuch am Freilauf *Modell 1* (erreichtes Schermoment von 2,88 kNm) . . . . . 183

Abb. 6.41: Scherversuch mit Freilauf *Modell 1* - Prüfling P05 . . . . . 184

Abb. 7.1: Verlauf der mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneten Kräfteverhältnisse bei Variation des Außendurchmessers  $D_{AR}$  des Außenrings des stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf *Modell 1* . . . . . 186

Abb. 7.2: Verlauf der mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneten Kräfteverhältnisse bei Variation der Breite  $b_{AR}$  des Außenrings des stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilaufs *Modell 1* . . . . . 187

Abb. 7.3: Verlauf der mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneten relativen Übertragbarkeit bei Variation der Breite  $b_{AR}$  des Außenrings des stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilaufs *Modell 1* bei einem Drehmoment von 230 Nm . . . . . 189

Abb. 7.4: Verlauf der mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneten Kräfteverhältnisse bei Variation des Außendurchmessers  $D_{FL}$  der unmittelbaren Anschlussgeometrie des stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilaufs *Modell 1* 190

Abb. 7.5: Verlauf der mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneten Kräfteverhältnisse bei Variation des Innendurchmessers  $d_{FL}$  der unmittelbaren Anschlussgeometrie des stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilaufs *Modell 1* 190

Abb. 7.6:	Verlauf der mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneten Kräfteverhältnisse bei Variation der Breite $b_{FL}$ der unmittelbaren Anschlussgeometrie des stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilaufs <i>Modell 1</i> . . . . .	191
Abb. 7.7:	Hinweise für eine optimale Gestaltung eines stirnseitig befestigten Freilaufs und seiner unmittelbaren Anschlusskonstruktion	192
Abb. 9.1:	Ablaufdiagramm zur Entscheidung, ob radiale Zusatzkräfte infolge behinderter radialer Aufweitung an einer stirnseitigen Mehrschraubenverbindung zu berücksichtigen sind . . . . .	203
Abb. 9.2:	Deckelverschraubung an einem Druckbehälter . . . . .	204
Abb. 9.3:	Flanschverbindungen an einem Rohr unter Innendruck - links: ungünstige Konstruktion mit höheren radialen Zusatzlasten - rechts: günstige Konstruktion mit annähernd gleichen radialen Steifigkeiten im Kontaktbereich . . . . .	204
Abb. 9.4:	Reale Außenkontur (links) und ideale Ersatzschale in Form einer Kegelschale mit linear veränderlicher Wandstärke (rechts) .	206
Abb. 9.5:	Mit bekannten Lösungen der Schalentheorie beschreibbare Konturen in Form einer Kegelschale mit konstanter Wandstärke (links) und einer Kreiszyinderschale mit linear veränderlicher Wandstärke (rechts) . . . . .	206

## Tabellenverzeichnis

Tab. 2.1:	Mindestabstände für absichere Schraubenverbindungen nach [VDI14a] . . . . .	19
Tab. 2.2:	Scherfestigkeiten für Schrauben nach [Tho84] . . . . .	19
Tab. 2.3:	Anzunehmende Haftreibwerte für Reibflächen nach [EN1090] .	23
Tab. 2.4:	Scherfestigkeiten für Schrauben nach [EC3a] . . . . .	24
Tab. 2.5:	Mindestabstände nach [EC3a] für statische Belastungen . . . .	26
Tab. 2.6:	Mindestabstände nach [EC3a] für Ermüdungsbelastung . . . .	26

Tab. 3.1: Randverformungen von Zylinderschalen unter Innendruck im Membranzustand nach [HM01] . . . . . 51

Tab. 3.2: Randverformungen langer rotationssymmetrischer Zylinderschalen ( $\lambda \cdot B \geq 4$ ) im Biegezustand nach [HM01] . . . . . 55

Tab. 3.3: Randverformungen kurzer rotationssymmetrischer Zylinderschalen ( $\lambda \cdot B < 4$ ) im Biegezustand (nach [HM01]) – Die Werte der Hilfsfunktionen  $H_1$  bis  $H_6$  gelten jeweils für die Länge des entsprechenden Einzelkörpers  $B$  (z.B.  $H_1 \hat{=} H_1(\lambda \cdot B)$ ) . . 60

Tab. 5.1: Hauptgeometriewerte der Ersatzkörper des stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf *Modell 1* für die Berechnung mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell 128

Tab. 6.1: Zur Verfügung stehende Prüflinge . . . . . 134

Tab. 6.2: Haftreibwerte für die Freiläufe *Modell 1* und *Modell 2* und ihre entsprechenden Dummies . . . . . 141

Tab. 6.3: Anziehungsfaktoren und erreichbare Vorspannkraftgenauigkeiten gängiger Anziehverfahren nach [VDI14a] . . . . . 142

Tab. 6.4: Veränderung des Betrags der Radialdehnung auf dem Schraubenkopf nach [Cho16] . . . . . 150

Tab. 6.5: Anziehungsfaktoren und erreichbare Vorspannkraftgenauigkeiten mit DMS-Messschrauben bei Einmessen jeder Schraube gepaart mit einer zugehörigen Unterlegscheibe und beliebiger Durchgangsbohrung und freier Lage der Schraube (nach [Cho16]) . . . . . 157

Tab. 6.6: Schraubenvorspannungen der sechs DMS-Messschrauben (Sechskantschrauben ISO 4014 - M6x60 - 8.8) am Freilauf *Modell 1* nach dem Anziehen mit 75 % der maximal zulässigen Schraubenvorspannung . . . . . 164

Tab. B.1: Liste der Designpoints für Parametervariation . . . . . 228

# Verwendete Größen und Indizes

Bei den in der Arbeit verwendeten Formeln handelt es sich um Größengleichungen. In diesen Gleichungen sind die Formelzeichen gleichbedeutend einem Produkt aus Zahlenwert und Einheit, also einer physikalischen Größe.

## Lateinische Buchstaben

Zeichen	Einheit	Bedeutung
$a$	m	Abstand der Ersatzwirkungslinie nach [VDI14a]
$A$	m <sup>2</sup>	Fläche/Querschnittsfläche
$A_S$	m <sup>2</sup>	Spannungsquerschnitt der Schraube
$A_\tau$	m <sup>2</sup>	Scherquerschnitt der Schraube
$A^u$	m <sup>2</sup>	Rand eines Körpers auf dem Verschiebungsrandbedingungen gelten
$A^\sigma$	m <sup>2</sup>	Rand eines Körpers auf dem Spannungsrandbedingungen gelten
$b_{AR}$	m	Breite des Freilaufaußenrings
$b_K$	m	Breite des Klemmbereichs
$b, B$	m	Breite
$b_x, B_x$	m	Breite
$\Delta B$	m	Längenänderung der Breite
$c$	m	axialer Abstand des Lastangriffpunkts
$c_x$	$\frac{N}{m}$	radiale Steifigkeit
$C_D$	—	Lochkreisverhältnis
$C_i$	m	allgemeine Variablen für die Ansatzfunktion der Radialverschiebung $u(z)$ ( $i \in \mathbb{N}$ )

*Fortsetzung auf Folgeseite*

<b>Zeichen</b>	<b>Einheit</b>	<b>Bedeutung</b>
$d$	m	Durchmesser
$d_x$	m	Durchmesser bzw. Innendurchmesser bei Hohlzylindern
$d_n$	m	Durchmesser der Schraubendurchgangsbohrung nach [VDI14a]
$d_K$	m	Kopfkreisdurchmesser einer Schraube
$d_\tau$	m	wirksamer Durchmesser der Schraube in der Scherfuge nach [VDI14a]
$D_x$	m	Außendurchmesser
$e_1, e_2$	—	Randabstände von Schrauben nach [EC3a]
$E$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Elastizitätsmodul (kurz: E-Modul)
$\underline{\underline{E}}$	$\frac{\text{m}}{\text{m}}$	Verzerrungstensor
$F_A, F_{ax}$	N	Axialkraft
$F_i$	m	Hilfsfunktionen für die Schalenberechnung ( $i \in \mathbb{N}$ )
$F_K$	N	Klemmkraft
$F_{K,Q,erf}$	N	erforderliche Mindestklemmkraft
$F_{KR}$	N	Restklemmkraft
$F_M$	N	Montagevorspannkraft
$F_{M,zul}$	N	maximal zulässige Montagevorspannkraft
$F_N$	N	Normalkraft
$F_{NK}$	N	Klemmnormalkraft
$F_{p,C}$	N	Mindestvorspannkraft nach [EC3a]
$F_P$	N	Flanschkraft
$F_{PA}$	N	Flanschentlastungskraft
$F_q$	N	Querkraft
$F_Q$	N	Scherkraft
$F_{Q,zul,L}, F_{b,Rd}$	N	ohne plastische Verformung übertragbare Querkraft (Lochleibung) nach [VDI14a] bzw. Lochleibungstragfähigkeit nach [EC3a]
$F_{Q,zul,S}, F_{v,Rd}$	N	zulässige Scherkraft nach [VDI14a] bzw. [EC3a]

*Fortsetzung auf Folgeseite*

---

Zeichen	Einheit	Bedeutung
$F_{Q,zul,\mu}, F_{s,Rd}$	N	Grenzgleitkraft nach [VDI14a] bzw. Gleitwiderstand nach [EC3a]
$\Delta F_R$	N	radiale Zusatzkraft in der Reibfuge der stirnseitigen Befestigung
$F_S$	N	Schraubenkraft
$F_{SV}$	N	Schraubenvorspannkraft
$F_{SV,ges}$	N	Gesamtschraubenvorspannkraft
$F_{t,Rd}$	N	zulässige Grenzkraft für eine Zubelastung der Schrauben nach [EC3a]
$F_T$	N	Umfangskraft
$F_{T,theor}$	N	theoretisch übertragbare Umfangskraft bei einem reinen Drehmoment
$F_{UK}$	N	Klemmumfangskraft
$F_Z$	N	Zugkraft
$G$	$\frac{N}{m^2}$	Schubmodul
$h$	m	Flanschdicke
$H$	m	Wandstärke
$H_i$	—	Hilfsfunktionen für die Schalenberechnung ( $i \in \mathbb{N}$ )
$\underline{J_f}$		Funktionalmatrix bzw. Jacobi-Matrix
$\underline{k}$	$\frac{m}{s^2}$	Kraftfeld (z.B. Erdbeschleunigung)
$k_1$	—	Faktor zur Berechnung der Lochleibungstragfähigkeit nach [EC3a]
$K$	Nm	Biegesteifigkeit einer Schale
$l_k$	m	Klemmlänge bzw. Länge der verspannten Teile
$m_z$	$\frac{Nm}{m}$	auf die Schalendicke $H$ bezogenes Biegemoment um die $z$ -Achse einer Schale
$m_{\vartheta}$	$\frac{Nm}{m}$	auf die Schalendicke $H$ bezogenes Biegemoment um die $\vartheta$ -Achse einer Schale
$M$	$\frac{Nm}{m}$	auf die Schalendicke $H$ bezogenes Randmoment (Kreppelmoment)
$M_E$	Nm	Einspannmoment nach [VDI14a]

Fortsetzung auf Folgeseite

Zeichen	Einheit	Bedeutung
$M_S$	$\frac{Nm}{m}$	auf den Schwerpunktsradius eines Kreisrings oder Hohlzylinders umgerechnete und auf die Schalendicke $H$ bezogenes Randmoment (Krempelmoment)
$M_T$	Nm	Drehmoment/Torsionsmoment
$n$	—	Krafteinleitungsfaktor nach [VDI14a]
$n$	—	teilweise auch Zählvariable (z.B. bei Summen)
$\underline{n}$	—	Vektor der Flächennormale
$n_R$	—	Anzahl der Reibflächen nach [EC3a]
$n_S$	—	Anzahl an Schrauben einer MV
$n_z$	$\frac{N}{m}$	auf die Schalendicke $H$ bezogene Längsmembrankraft
$n_\vartheta$	$\frac{N}{m}$	auf die Schalendicke $H$ bezogene Umfangsmembrankraft
$N$	—	Schwingspiellanzahl
$p_1, p_2$	—	Lochabstände zwischen Schrauben nach [EC3a]
$p_i$	$\frac{N}{m^2}$	Innendruck
$p_k$	$\frac{N}{m^2}$	äquivalenter Innendruck infolge der Klemmnormalkräfte $F_{NK}$
$q$	$\frac{N}{m}$	auf die Schalendicke $H$ bezogene Querkraft einer Schale
$q_F$	—	Anzahl kraftübertragender Trennfugen
$q_M$	—	Anzahl drehmomentübertragender Trennfugen
$r$	m	Radius
$r_a$	m	Außenradius
$r_i$	m	Innenradius
$\Delta r_l$	m	Radialverformung (Aufweitung) am linken Rand
$\Delta r_r$	m	Radialverformung (Aufweitung) am rechten Rand
$\Delta r_S$	m	Radialverformung (Aufweitung) des Schwerpunktsradius eines Kreisrings oder Hohlzylinders
$r_x$	m	Radius bzw. Innenradius bei Hohlzylindern

Fortsetzung auf Folgeseite



Zeichen	Einheit	Bedeutung
$R$	$\frac{\text{N}}{\text{m}}$	auf die Schalendicke $H$ bezogene radiale Randkraft
$R_x$	m	Außenradius
$R_m$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Zugfestigkeit
$R_{p0,2}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Streckgrenze bzw. 0,2%-Dehngrenze
$R_S$	$\frac{\text{N}}{\text{m}}$	auf den Schwerpunktsradius eines Kreisrings oder Hohlzylinders bezogene Radialkraft
$S_A$	—	Sicherheit gegen Abscheren
$S_G$	—	Sicherheit gegen Gleiten
$S_L$	—	Sicherheit gegen plastische Verformung durch Lochleibungsdruck
$t$	m	Blechdicke
$\underline{t}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Spannungsvektor
$\overline{t}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Vektor der Spannungsrandbedingungen
$\underline{T}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Spannungstensor
$u$	m	Verschiebung in radialer Richtung bzw. in Richtung der $r$ -Achse
$u_0$	m	Radialverschiebung/Aufweitung des Freilaufaußenrings
$u_l$	m	Radialverschiebung am linken Rand
$u_p$	m	Radialverschiebung infolge der Membranverformung
$u_r$	m	Radialverschiebung am rechten Rand
$\underline{U}$	m	Verschiebungsvektor
$\overline{U}$	m	Vektor der Verschiebungsrandbedingungen
$v$	m	Verschiebung in Umfangsrichtung bzw. in Richtung der $\varphi$ -Achse
$V$	$\text{m}^3$	Volumen
$V_x$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^3}$	Volumenkraft
$\underline{V}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^3}$	Vektor der Volumenkräfte
$w$	m	Verschiebung in axialer Richtung bzw. in Richtung der $z$ -Achse

Fortsetzung auf Folgeseite

Zeichen	Einheit	Bedeutung
$W_a$	J	Arbeit der äußeren Kräfte
$W_i$	J	Arbeit der inneren Kräfte
$X_k$	N / Nm	virtuelle Einheitslast (kann ein Moment oder eine Kraft sein)
$\underline{X}$	N / Nm	Vektor der (unbekannten) Kraftgrößen
$z_K$	—	Anzahl der Klemmstellen am Freilaufaußenring
$z_{KR}$	m	Dicke der Kreistringscheibe im kKS
$z_r$	m	axialer Abstand zwischen stirnseitiger Reibfuge und Klemmbereich des AR
$z_S$	—	Anzahl der Schrauben am Freilaufaußenring
$z_v$	m	Länge des unbelasteten Bereichs zwischen Klemmbereich und unbelastetem freien Ende des AR

## Griechische Buchstaben

Zeichen	Einheit	Bedeutung
$\alpha_b$	—	Faktor zur Berechnung der Lochleibungstragfähigkeit nach [EC3a]
$\alpha_d$	—	Faktor zur Berechnung der Lochleibungstragfähigkeit nach [EC3a]
$\alpha_A$	—	Anziehungsfaktor
$\alpha_K$	°	Klemmwinkel
$\alpha_v$	—	Verhältnis von Scher- zu Zugfestigkeit nach [ISO898]
$\beta$	m <sup>2</sup>	Querschnittskonstante für eine biegebelastete Kreiszyinderschale
$\beta_R$	—	relative Übertragbarkeit
$\gamma_x$	$\frac{m}{m}$	Gleitung
$\delta_{ik}$	m	Formänderungswert

*Fortsetzung auf Folgeseite*

Zeichen	Einheit	Bedeutung
$\delta_{i0}$	m	lastabhängige Verformung
$\underline{\delta_0}$	m	Vektor der lastabhängigen Verformungen
$\underline{\underline{\delta}}$	m	Matrix der Formänderungswerte / Elastizitätsma- trix
$\varepsilon_x$	$\frac{\text{m}}{\text{m}}$	Dehnung
$\varepsilon_z$	$\frac{\text{m}}{\text{m}}$	Längsdehnung
$\varepsilon_\vartheta$	$\frac{\text{m}}{\text{m}}$	Umfangsdehnung
$\zeta$	—	bezogene Länge einer Schale ( $\zeta(z) = \lambda \cdot z$ )
$\eta$	—	Hilfsfunktion für die Berechnung von Schalen
$\bar{\kappa}$	—	Schubverteilungszahl
$\lambda$	$\frac{1}{\text{m}}$	Kehrwert der charakteristischen Länge einer Schale
$\mu$	—	Reibwert
$\nu$	—	Querkontraktionszahl
$\rho$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Dichte
$\sigma_x$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	(Normal-)Spannung
$\sigma_z$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Zugspannung
$\sigma_\vartheta$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Umfangsspannung
$\tau_x$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Schubspannung
$\tau_B$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Scherfestigkeit
$\tau_D$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	(Scher-)Dauerfestigkeit nach [VDI14a]
$\Delta\tau$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	dynamisch wirkende Schubbeanspruchung
$\Delta\tau_C$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Kerbfallzahl nach [EC3b]
$\Delta\tau_L$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Schwellenwert der Ermüdungsfestigkeit nach [EC3b]
$\Delta\tau_R$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Schubspannungsschwingbreite nach [EC3b]
$\varphi$	rad bzw. °	Verdrehung
$\varphi_R$	rad bzw. °	Verdrehung infolge einer Radialkraft $R$
$\varphi_M$	rad bzw. °	Verdrehung infolge eines Randmoments $M$

Fortsetzung auf Folgeseite

Zeichen	Einheit	Bedeutung
$\Psi$	rad bzw. $^{\circ}$	Verdrehung der Mittelfläche

Indizes

Zuvor genannte Größen, die mit dem Index  $_{\text{x}}$  gekennzeichnet wurden, können in der Arbeit verschiedene Indizes zugeordnet werden, die Bedeutung der jeweiligen Indizes ergibt sich aus der nachfolgenden Tabelle.

Index	Bedeutung
AR	bezogen auf den Außenring bzw. des Außenrings
FL	bezogen auf den Anschlussflansch bzw. des Anschlussflanschs
$i$	allgemeine Laufvariable ( $i \in \mathbb{N}$ )
max	maximal
min	minimal, Mindest-
r	in radialer Richtung
S	bezogen auf den Schwerpunkt
T	bezogen auf den Lochkreis der Verschraubung
z	in axialer Richtung bzw. in Richtung der $z$ -Achse
$\varphi$	in Umfangsrichtung bzw. in Richtung von $\varphi$
zul	zulässig

## Mathematische Symbole

Symbol	Bedeutung
$\underline{x}$	die Größe $x$ ist ein Vektor
$\underline{\underline{x}}$	die Größe $x$ ist eine Matrix
$\text{tr}(\underline{\underline{x}})$	Spur der Matrix $\underline{\underline{x}}$
$\underline{\underline{x}}^T$	Transponierte der Matrix $\underline{\underline{x}}$
$\underline{\underline{x}}^{-1}$	Inverse der Matrix $\underline{\underline{x}}$
$\frac{\delta x}{\delta y}$	partielle Ableitung der Größe $x$ nach $y$
$\frac{dx}{dy}, x'$	(totale) Ableitung der Größe $x$ nach $y$
$x^{(i)}(y)$	i-te (totale) Ableitung der Größe $x$ nach $y$
$\underline{\underline{x}} \bullet \underline{\underline{z}}$	Skalarprodukt der Matrizen $\underline{\underline{x}}$ und $\underline{\underline{z}}$



## Verzeichnis verwendeter Abkürzungen

Abkürzung	Bedeutung
2D	zweidimensional
3D	dreidimensional
AR	Freilaufaußenring
DIN	Deutsches Institut für Normung
DMS	Dehnungsmessstreifen
DSS	Dünnschichtsensor
EC	Eurocode
EN	Europäische Norm
ESZ	Ebener Spannungszustand
EV	Einschraubenverbindung
EVZ	Ebener Dehnungszustand
FE	Finite Elemente
FEM	Finite-Elemente-Methode bzw. auch als „Methode der finiten Elemente“ bekannt
FL	Flansch
FVA	Forschungsvereinigung Antriebstechnik e. V.
kKS	kombiniertes Kreisring-Schalenmodell
KK	Klemmkörperfreilauf
KR	Klemmrollenfreilauf
IMW	Institut für Maschinenwesen der Technischen Universität Clausthal
ISO	International Organization for Standardization (englisch für: Internationale Organisation für Normung)
LGS	lineares Gleichungssystem
MV	Mehrschraubenverbindung

*Fortsetzung auf Folgeseite*

<b>Abkürzung</b>	<b>Bedeutung</b>
RSZ	rotationssymmetrischer Spannungszustand
SV	Schraubenverbindung
VDI	Verein Deutscher Ingenieure
VTB	Verallgemeinerte Technische Biegetheorie
VZ	Versuchsanzahl



## Kurzfassung

Freiläufe sind selbsttätig richtungsabhängig schaltende Kupplungen. Als solche übertragen sie ein Drehmoment nur in einer Richtung, wobei die Drehmomentübertragung innerhalb des Freilaufs in der industriellen Anwendung in der Regel kraftschlüssig erfolgt. Dieser radiale Reibschluss bedeutet hohe Normalkräfte, welche an den Klemmkontakten nach außen gerichtet wirken und dementsprechend eine radiale Aufweitung des Freilaufaußenrings bewirken. Für die Verbindung zwischen dem Freilaufaußenring und der kundenspezifischen Anschlusskonstruktion existieren mehrere gebräuchliche Möglichkeiten. Eine weitverbreitete Art der Befestigung stellt hier die stirnseitige Befestigung über eine rotationssymmetrische Mehrschraubenverbindung dar. Für die Schraubenverbindung ergeben sich durch die besondere Belastungssituation im Freilauf spezifische Lasten, die die kraftschlüssige Übertragbarkeit in der stirnseitigen Verbindung reduzieren bzw. im Betrieb sogar gänzlich aufheben können. Die hinter dieser Reduktion stehenden Mechanismen, und inwiefern diese Reduktion durch die konstruktive Gestaltung der Anschlusskonstruktion eventuell abgeschwächt werden kann, waren jedoch unbekannt. Mit dieser Arbeit wird diese Lücke nun geschlossen.

In Kapitel 1 wird mit Erklärungen der grundlegenden Funktionsweisen und Begrifflichkeiten stirnseitig befestigter Freiläufe begonnen und das behandelte Problem und die Zielsetzung der Arbeit vorgegeben. Anschließend wird in Kapitel 2 eine Einordnung in den Stand der Technik vorgenommen und die Grundlagen der Berechnung quer belasteter Schraubenverbindungen nach den gängigen Auslegungsrichtlinien des Maschinenbaus (VDI 2230) und des Bauwesens (Eurocode 3) dargestellt. Kapitel 3 legt die Grundlagen zum Verständnis der in dieser Arbeit genutzten Theorien der Technischen Mechanik, besonders die im Maschinenbau nicht sehr verbreitete *Schalentheorie*.

Mit dem analytischen Modell in Kapitel 4 wird erstmals eine Modellvorstellung entwickelt, mit der sich die Auswirkung der freilaufspezifisch hohen Radialkräfte auf

die stirnseitige Verbindung beschreiben lässt. Die Reduktion der kraftschlüssigen Übertragbarkeit in der stirnseitigen Befestigung eines Freilaufs wird auf radiale Zusatzkräfte zurückgeführt, die infolge des Ausgleichs der ungleichen radialen Aufweitungen der stirnseitig miteinander verbundenen Körper des Freilaufaußenrings und der stirnseitigen Anschlusskonstruktion entstehen.

In Kapitel 5 werden verschiedene Methoden zur Abschätzung dieser radialen Zusatzkräfte vorgestellt und untersucht. Hierbei werden zum einen mögliche Modellierungen von FE-Modellen stirnseitig befestigter Freiläufe untersucht und gezeigt, dass mit 2D-FE-Modellen mit einfachen Verbundkontakten eine gute Abschätzung dieser Kräfte erreicht wird. Für eine anschauliche Erklärung der Zusammenhänge und der hinter den entstehenden Zusatzkräften stehenden Effekte ist ein FE-Modell jedoch eher ungeeignet. Deshalb wird in Abschnitt 5.3 ein elastomechanisches Berechnungsmodell zur Abschätzung der radialen Zusatzkräfte vorgestellt. In diesem als *kombiniertes Kreisring-Schalenmodell* (kurz: kKS) bezeichnetem Berechnungsmodell wird der stirnseitige befestigte Freilauf mit seiner Anschlusskonstruktion als Verbund von Schalenkörpern und Kreisringscheiben (Ersatzkörper) beschrieben. Über das Kraftgrößenverfahren können anschließend die Kontaktkräfte und -momente zwischen den einzelnen Ersatzkörpern sowie unter jenen die radialen Zusatzkräfte berechnet werden. Es zeigte sich, dass mit diesem elastomechanischen Modell in der Regel eine konservative Abschätzung der radialen Zusatzkräfte und damit auch der mit diesen verknüpften kraftschlüssig übertragbaren Drehmomente erreicht wird. Das kKS kann hierbei aufgrund der zugrunde liegenden einfachen analytischen Beschreibung systemunabhängig rechnergestützt umgesetzt werden und erlaubt so eine einfache und sehr schnelle Abschätzung der radialen Zusatzkräfte.

Die in Kapitel 6 beschriebenen experimentellen Untersuchungen hatten zum einen das Ziel, die Berechnungsmethoden zu validieren, und zum anderen, die Theorie der behinderten radialen Aufweitung zu überprüfen. Hierzu wurden vorbereitend Reibwertuntersuchungen an verschiedenen Prüflingen durchgeführt und ein dehnungsgesteuertes Verfahren zur Messung der Schraubenvorspannung weiterentwickelt. Beides war erforderlich, um die in Unterabschnitt 6.4.1 beschriebenen Rutschversuche zum Nachweis der relativen Übertragbarkeit auswerten zu können. In diesen konnte gezeigt werden, dass die hohen Klemmnormalkräfte am Freilauf eine Reduktion der kraftschlüssig übertragbaren Drehmomente bewirken. Mit Messungen der realen Aufweitungen des Freilaufaußenrings und dem Vergleich mit

über das kKS berechneten und in FE-Modellen simulierten Aufweitungsverläufen konnten in Unterabschnitt 6.4.2 die Abschätzungsmethoden aus Kapitel 5 validiert werden.

Unter Nutzung des kKS werden in Kapitel 7 Hinweise zur optimalen Gestaltung eines stirnseitig befestigten Freilaufs und seiner unmittelbaren Anschlusskonstruktion gegeben, bevor in Kapitel 8 eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit erfolgt. Die Arbeit endet mit einem Ausblick in Kapitel 9. Darin sind zum einen Ansätze enthalten, wie die Erkenntnisse dieser Arbeit auf weitere Gebiete, wie z.B. Flanschverbindungen an Druckbehältern und Rohren unter Innendruck, übertragen werden könnten und zum anderen, wie die Abschätzung durch das kKS weiter verbessert werden könnte.



## Abstract

Freewheels are directional switching clutches, that transmit torque only one directional. The torque transmission in industrial applications is normally achieved force-locking. The radial force-locking results in high normal forces that are pointed outwards at the clamping points and thus lead to a radial expansion of the outer ring of the freewheel. Various possibilities exist for the connection between the outer ring of the freewheel clutch and the customer-specific adjacent construction. A widely used mounting possibility is a front mount by a rotationally symmetric multi-bolted joint. Out of the special load situation in the freewheel clutch itself result specific loads, that can reduce the force-locking transmissibility in the front mount or rather completely nullify the force-locking during operation. The mechanisms behind this reduction and therefore how this reduction can potentially be softened by the physical design of the adjacent construction were yet unknown. This work closes this gap in knowledge now.

Chapter 1 begins with explanations of the basic operating principles and the terminology of front mounted freewheel clutches. Further the discussed issue and the objective of this work is given. Joined by the placement in the state of the art and the fundamentals of calculating transversely loaded bolted joints after the common design guidelines in mechanical engineering (VDI 2230) and in civil engineering (Eurocode 3) in chapter 2. Chapter 3 lays the foundation for understanding the theories of engineering mechanics used in this work, in particular the, in mechanical engineering not very common, *theory of shells*.

The analytical model in chapter 4 is the first model representation that describes the effects of the freewheel-specific high radial forces on the front mounted joint. The reduction in the force-locking transmissibility of a front mounted freewheel clutch is traced back to additional radial forces, which result out of the compensation of the unequal radial expansion of the front mounted bodies of the freewheels outer ring and the adjacent construction.

In chapter 5 various methods of estimating these additional radial forces are presented and analyzed. In doing so different possible FE-models of front mounted freewheels are tested and it is shown that with 2D-FE-models which use simple bonding contacts a good estimate of these forces is achieved. But for a descriptive explanation of the relations and the effects behind the resulting additional forces a FE-model is rather inconvenient. Therefore, an elastomechanical calculation model for the estimation of the additional radial forces is presented in section 5.3. In this calculation model referred to as *combined circular ring - shell model* (in German: *kombiniertes Kreisring-Schalenmodell* – or in short: kKS) the front mounted free-wheel with its adjacent construction is described as a compound of shell bodies and circular ring discs (equivalent bodies). Using the flexibility method, the contact forces and moments between the individual equivalent bodies and among these the additional radial forces can be calculated. Usually a conservative estimation results with this elastomechanical model both for the additional radial forces and the linked force-locked transmittable torques. The kKS can be used computerized system-independently out of the underlying simple analytical description. Thus, allowing a quick and easy estimate of the resulting additional radial forces.

The experimental studies described in chapter 6 aimed, on the one hand, for the validation of the calculation methods and, on the other hand, to verify the theory of the restraint radial expansion. For this purpose, friction tests were carried out on various specimens and a strain-controlled method for measuring the bolt pretension was refined. Both was necessary in order to evaluate the sliding tests undertaken to prove the relative transmissibility as described in subsection 6.4.1. It could be shown that the high clamping normal forces in the freewheel lead to a reduction of the force-locking transmittable torques. By measuring the shape of the radial expansion along the freewheels outer ring and comparing it with the calculated shapes out of the kKS and the simulated shapes out of corresponding FE-models the estimation methods from chapter 5 could be validated in subsection 6.4.2.

Using the kKS tips for an optimal design of the connection between a front mounted freewheel and its direct adjacent construction are given in chapter 7. Followed by a summary of the key findings of this work in chapter 8. This scientific work ends with an outlook in chapter 9, which contains for one thing, further approaches to transfer the findings of this work to other fields, as e.g. flange joints on pressure vessels and pipelines under inner pressure, and secondly, approaches on how the estimate through the kKS could be further refined.

## Danksagungen

Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen bedanken, die mich während der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben. Sie entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Konstruktionslehre und Maschinenelemente des Fritz-Süchting-Instituts für Maschinenwesen (IMW) der Technischen Universität Clausthal.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Armin Lohrengel, dem Leiter des IMW, für die Betreuung meiner Arbeit und das mir entgegengebrachte Vertrauen. Nicht zuletzt dank der vielen gewährten Forschungsfreiräume konnte die Arbeit in der nun vorliegenden Form entstehen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Karl-Heinrich Grote, Leiter des Lehrstuhls für Konstruktionstechnik des Instituts für Maschinenkonstruktion der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, danke ich für sein Interesse an meiner Arbeit und die Übernahme des Korreferats.

Der Anstoß zu dieser Arbeit entstand aus und während meiner Bearbeitung des Forschungsvorhabens FVA 704 I „Stirnseitige Befestigung von Freiläufen“. Ich danke der Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA) für die Unterstützung meiner Arbeit und den Mitgliedern des Projektbegleitenden Ausschusses „Freiläufe“ für die anregenden Diskussionen und die Begleitung des Forschungsvorhabens.

Bedanken möchte ich mich bei meinen Kollegen am IMW aus allen Bereichen für das familiäre Arbeitsklima, die konstruktive Zusammenarbeit und auch die Aktivitäten außerhalb der Arbeit. Ich habe es sehr genossen mit euch allen zusammenzuarbeiten. Stellvertretend möchte ich mich bei Dr.-Ing. Marcel Heß und Dr.-Ing. Tobias Mänz für die vielen fachlichen und auch privaten Gespräche sowie die stete Ermutigung bedanken.

Bei meinen zahlreichen Studien- und Abschlussarbeitern und studentischen Hilfskräften möchte ich mich ebenso bedanken. Zu dieser Arbeit haben aus dieser

Schar besonders Herr Wolfgang Scherm mit der Konstruktion des Schrauben-Freilauf-Prüfstands und Herr David Chorzewski mit der Qualifizierung des verwendeten Messverfahrens zur Schraubenvorspannungsmessung beigetragen. Weiterhin gilt mein Dank Herrn Nils Fischer, Herrn Tobias Hundhausen und Herrn Ansgar Wunderlich für ihre Literaturrecherchen zur Schalentheorie und weiteren Berechnungsmethoden für die radiale Aufweitung von Rohren unter Innendruck.

Herrn Dekan Peter Bauer möchte ich für das Korrekturlesen meiner Arbeit danken. Seinem obersten Dienstherrn und Schöpfer aller Dinge danke ich dafür, dass er die Dinge so wunderbar geschaffen hat, dass es wohl noch für viele Jahre der Forschung reichen wird.

Meinen Eltern, meiner Familie und Freunden sowie meiner Partnerin möchte ich für all den Rückhalt, die seelische Unterstützung und den Ausgleich während der Erstellung dieser Arbeit danken.

Vielen Dank!

*S.D.G.*



# 1 Einleitung

Freiläufe sind selbsttätig richtungsabhängig schaltende Kupplungen. Als solche übertragen sie ein Drehmoment nur in einer Richtung, wobei die Drehmomentübertragung innerhalb des Freilaufs formschlüssig oder kraftschlüssig erfolgen kann. In der industriellen Anwendung überwiegen hierbei Freiläufe mit kraftschlüssiger Arbeitsweise und radialem Reibschluss. Die heute gebräuchlichsten Bauformen sind sogenannte Klemmrollenfreiläufe mit Innenstern und Klemmkörperfreiläufe.

Kraftschlüssige Freiläufe sind intern so aufgebaut, dass es bei Bewegung des Freilaufs in Sperrrichtung zu einem Verklemmen der Klemmrollen bzw. Klemmkörper kommt. Infolge des Verklemmens entsteht unter anderem an den Klemmstellen eine Normalkraft in radialer Richtung. Diese Normalkraft erlaubt die reibschlüssige Übertragung von Umfangskräften bzw. eines Drehmoments. Durch die unter anderem bereits aus Gründen des Verschleißschutzes notwendige Schmierung der Klemmrollen bzw. Klemmkörper werden die bei der Drehmomentübertragung entstehenden Klemmnormalkräfte relativ hoch eingestellt.

Für die Verbindung zwischen dem Freilaufaußenring und der kundenspezifischen Anschlusskonstruktion existieren mehrere gebräuchliche Möglichkeiten. Eine weitverbreitete Art der Befestigung stellt hier die stirnseitige Befestigung über eine rotationssymmetrische Mehrschraubenverbindung dar. Für die Schraubenverbindung ergeben sich, durch die besondere Belastungssituation im Freilauf, spezifische Lasten, die die kraftschlüssige Übertragbarkeit in der stirnseitigen Verbindung reduzieren bzw. im Betrieb sogar gänzlich aufheben können.

Im Rahmen dieser Dissertation wird eine Modellvorstellung entwickelt, mit der sich die Auswirkung der freilaufspezifisch hohen Radialkräfte auf die stirnseitige Verbindung beschreiben lässt. Weiterhin wurden verschiedene Berechnungsmodelle entwickelt, mit denen sich die kraftschlüssige Übertragungsfähigkeit der Gesamtverbindung abschätzen lässt. Bevor jedoch diese Modelle genauer vorgestellt werden, soll in den nachfolgenden Ausführungen zuerst die am Freilauf vorherrschende Be-

lastungssituation erläutert werden.

## 1.1 Funktionsprinzip kraftschlüssiger Freiläufe

Wie bereits eingangs erwähnt, sind die heutzutage wohl gebräuchlichsten Bauformen für Freiläufe in der industriellen Anwendung der Klemmrollenfreilauf mit Innenstern und der Klemmkörperfreilauf. Die folgenden Ausführungen beziehen sich bereits auf stirnseitig befestigte Freiläufe, bei denen sich der Außenring fest an einer ebenfalls festen Umgebungs konstruktion abstützt. Die nachfolgenden Abbildungen dienen der Veranschaulichung des Funktionsprinzips kraftschlüssiger Freiläufe und sind bewusst vereinfachend dargestellt.

Beim Klemmrollenfreilauf wird die Freilauffunktion über die Geometrie der Klemmrampen verwirklicht. Wie in Abb. 1.1 zu erkennen, werden die zylindrischen Klemmrollen bei Bewegung des Innenrings in Sperrrichtung in einen sich verengenden Spalt gezogen. Hierdurch kommt es zu einem Verklemmen der Klemmrollen zwischen Außenring und Innenring mit Klemmrampe (auch Innenstern genannt). Damit die Klemmrollen auch zuverlässig und schnell in den sich verengenden Klemmspalt gezogen werden, sind derartige Freiläufe in der Regel mit einer Anfederung versehen.

Wird der Innenring entgegen seiner Sperrrichtung, also in Freilaufrichtung, bewegt, so bewegen sich die Klemmrollen gegen die Anfederung aus dem Klemmspalt heraus und es kann kein Drehmoment mehr übertragen werden.

Bei Klemmkörperfreiläufen wird die Freilauffunktion über die Geometrie der einzelnen Klemmelemente bzw. Klemmkörper realisiert. Diese können vereinfacht als zwei gegeneinander verschobene Halbzylinder angesehen werden (siehe Abb. 1.2). Die Klemmkörper weisen somit je nach Ausrichtung einen unterschiedlichen Durchmesser auf. Bei Bewegung des Innenrings in Sperrrichtung kippen die Klemmkörper um ihre Achse und verklemmen sich zwischen Außen- und Innenring. Die Lauffläche des Innenrings ist beim Klemmkörperfreilauf, im Gegensatz zum Innenstern des Klemmrollenfreilaufs, kreisrund.

Bei Bewegung des Innenrings in Freilaufrichtung kippen die Klemmkörper abermals um ihre Achse. Dieses Mal jedoch in Richtung ihres minimalen Durchmessers, welcher kleiner als der Spalt zwischen Außen- und Innenring ist. Damit kann der Freilauf in dieser Richtung frei drehen. Um unter anderem ein schnelles An-

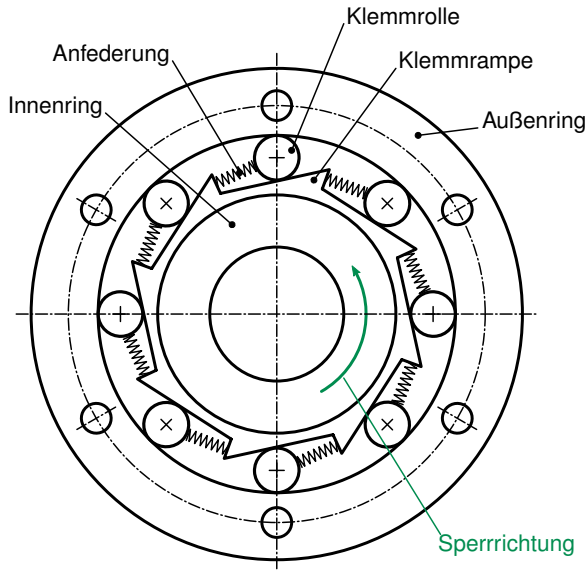


Abb. 1.1: prinzipieller Aufbau eines Klemmrollenfreilaufs mit Innenstern

sprechen (Schalten) des Freilaufs zu ermöglichen, sind die Klemmkörper in der Regel ebenfalls angefedert.

Beim Verklemmen der Klemmrollen bzw. Klemmkörper kommt es zum Ausbilden von Klemmkraften an den Kontakten zwischen Klemmelement, Außen- und Innenring. Die Klemmkraften lassen sich in je eine Normal- und eine Umfangskomponente aufteilen, wie sie in Abb. 1.3 für den äußeren Kontakt zwischen Freilaufaußenring und Klemmrolle nur schematisch dargestellt sind. Die Normalkomponente wird im Folgenden als Klemmnormalkraft  $F_{NK}$  und die Umfangskomponente als Klemmumfangskraft  $F_{UK}$  bezeichnet. Das sich einstellende Verhältnis zwischen diesen beiden Kräften hängt von der Geometrie des Freilaufs ab und kann über den sogenannten Klemmwinkel  $\alpha_K$  beschrieben werden. Der Zusammenhang zwischen den Kräften beträgt hierbei

$$\tan(\alpha_K) = \frac{F_{UK}}{F_{NK}} \quad (1.1)$$

Hierbei bewegen sich die üblichen Klemmwinkel in einstelligen °-Bereichen. Nach STÖLZLE und HART [SH61] liegen die Klemmwinkel bei Belastungsbeginn in einem Bereich von  $3^\circ - 4^\circ$  und unter Maximallast bei  $5^\circ$ . Als obere Grenze für

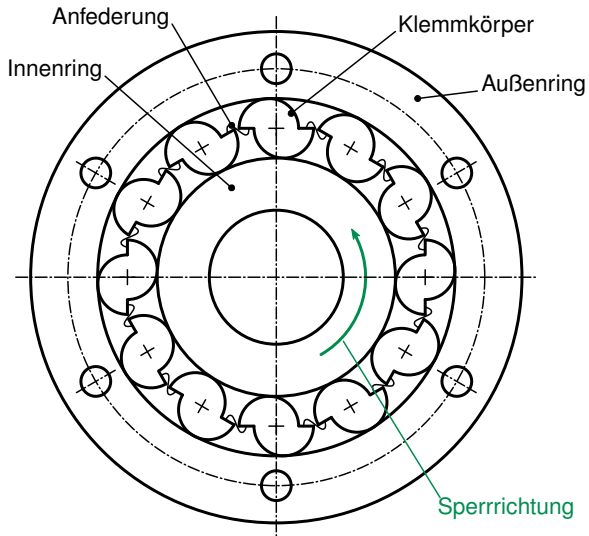


Abb. 1.2: prinzipieller Aufbau eines Klemmkörperfreilaufs

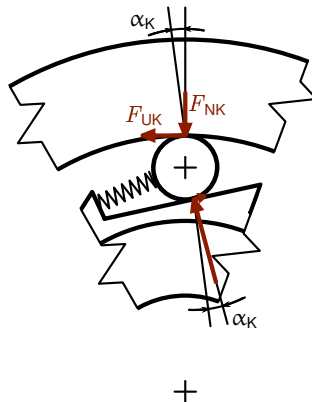


Abb. 1.3: Kräfte an der Klemmrolle (unter Vernachlässigung der Kräfte aus der Anfederung)

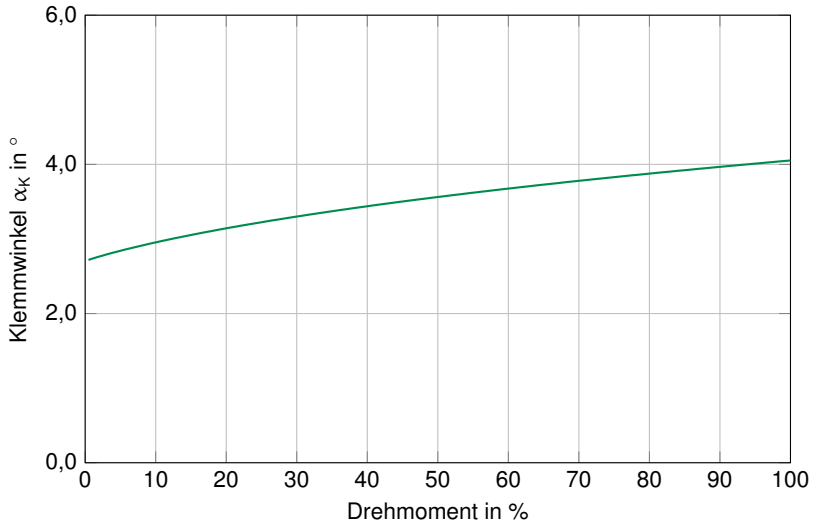


Abb. 1.4: Beispielhafter Klemmwinkelverlauf für einen Klemmrollenfreilauf, aufgetragen über das auf das Freilaufgrenzmoment bezogene Drehmoment

den Klemmwinkel  $\alpha_K$  werden in [SH61]  $6^\circ$  genannt. Abb. 1.4 zeigt beispielhaft den qualitativen Verlauf des Klemmwinkels über dem Drehmoment für einen Klemmrollenfreilauf. Bei einem maximalen Klemmwinkel von  $4^\circ$  beträgt somit die Klemmumfangskraft ca. 7 % der Klemmnormalkraft. Das Verhältnis zwischen den Beträgen der Klemmnormal- und Klemmumfangskraft ist in Abb. 1.3 am inneren Kontakt zwischen Innenring bzw. Klemmrampe und Klemmrolle veranschaulicht.

Der maximal mögliche Klemmwinkel ist durch die Reibung an den Klemmkontakten begrenzt. Wenn an diesen Stellen die kraftschlüssig zu übertragenden Kräfte die über die Normalkraft  $F_{NK}$  und den Reibwert  $\mu$  im Kontakt übersteigen, so kommt es zum Durchrutschen des Freilaufs und das Gesamtsystem verliert seine Funktion. Dieses Verhalten wird über das Funktionskriterium des Freilaufs ausgedrückt, wie es zum Beispiel in [SH61] beschrieben ist. Für dieses Kriterium gilt, dass das Verhältnis aus Klemmumfangs- zu Klemmnormalkräften – also der Tangens des Klemmwinkels  $\alpha_K$  nach Gleichung (1.1) – kleiner als der maximal mögliche Haftreibwert  $\mu$  im Klemmkontakt sein muss.

$$\tan(\alpha_K) = \frac{F_{UK}}{F_{NK}} < \mu \quad (1.2)$$

Dieses Funktionskriterium wurde durch NAGLER in [Nag16] für zusätzlich zu den Umfangskräften bzw. dem Drehmoment wirkende Axialkräfte  $F_A$  erweitert. Diese zusätzlich an den Klemmkontakten wirkende parasitäre Kraftkomponente bewirkt eine weitere Eingrenzung des Funktionskriteriums. Nach [Nag16] gilt in diesem Fall

$$\sqrt{\left(\frac{F_A^2}{F_{UK}^2} + 1\right)} \cdot \tan^2(\alpha_K) < \mu \quad . \quad (1.3)$$

Wird die Gleichung (1.3) nach dem Tangens des Klemmwinkels umgestellt, so ergibt sich:

$$\tan(\alpha_K) < \frac{\mu}{\sqrt{\left(\frac{F_A^2}{F_{UK}^2} + 1\right)}} \quad (1.4)$$

Bereits aus dem einfachen Funktionskriterium (Gleichung (1.2)) ist ersichtlich, dass durch den Reibwert im Klemmkontakt Klemmwinkel größer als  $\arctan(\mu)$  nicht funktionssicher sind. Durch eventuell überlagerte parasitäre Belastungen wird der maximale Klemmwinkel sogar noch weiter verringert. Ein typischer maximaler Reibwert für den Freilaufkontakt ist  $\mu = 0,1$ , dieser Wert wurde in [Nag16] durch umfangreiche Versuche bestätigt.

Es ist weiterhin ersichtlich, dass die bei Belastung des Freilaufs mit einem Drehmoment entstehenden Klemmnormalkräfte ein Vielfaches der Klemmumfangskräfte betragen und somit eine nicht zu vernachlässigende Belastung für das Gesamtsystem darstellen. Die das Drehmoment  $M_T$  erzeugenden Klemmumfangskräfte  $F_{UK}$  wirken am Innendurchmesser des Freilaufaußenrings und stehen mit den Umfangskräften  $F_T$  der stirnseitigen Mehrschraubenverbindung im Gleichgewicht. In Abb. 1.5 sind die am Freilaufaußenring angreifenden Kräfte, unter Vernachlässigung von Axialkräften (Wirkrichtung in die Zeichenebene hinein), für den in Abb. 1.1 dargestellten Klemmrollenfreilauf dargestellt. Die Anzahl und Lage der Klemm- und Verschraubungsstellen sei hierbei nur beispielhaft. Bezogen auf die Belastungssituation am Außenring ergäbe sich für den Klemmkörperfreilauf aus Abb. 1.2 ein vergleichbares Bild, einzig die Anzahl und Lage der Kraftangriffsstellen wäre unterschiedlich.

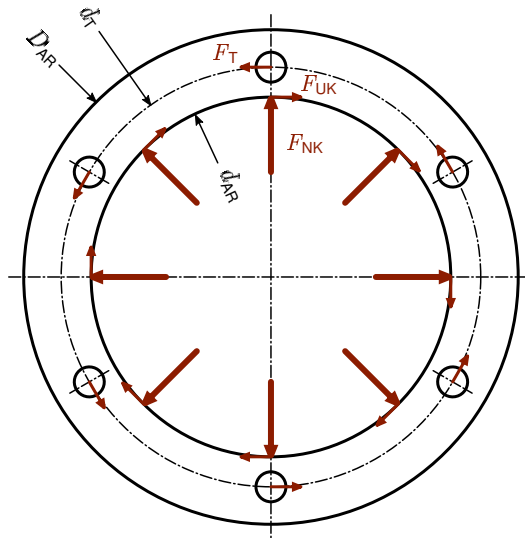


Abb. 1.5: Kräfte am Außenring eines kraftschlüssigen Freilaufs (am Beispiel eines Klemmrollenfreilaufs mit Innenstern)

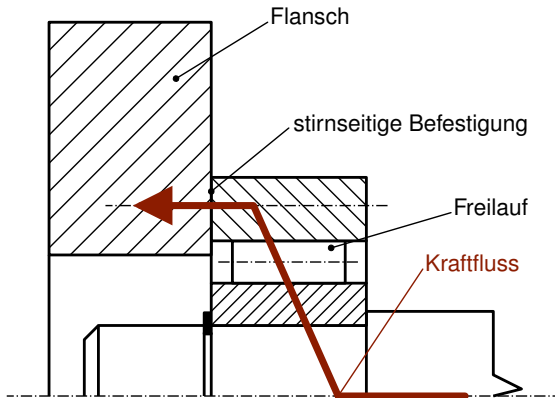


Abb. 1.6: Stirnseitig befestigter Freilauf (schematische Darstellung)

## 1.2 Der stirnseitig befestigte Freilauf

Nachdem im vorherigen Kapitel die Grundlagen kraftschlüssiger Freiläufe erläutert wurden, soll nun der Begriff des „stirnseitig befestigten Freilaufs“ kurz erläutert werden. Wie bereits angekündigt, ist darunter die Befestigung des Freilaufs mit der Umgebungskonstruktion durch eine rotationssymmetrische Mehrschraubenverbindung zu verstehen. Hierbei wird der Freilaufaußenring über einen entsprechenden Lochkreis stirnseitig an die Anschlusskonstruktion der weiteren Anlage stirnseitig verschraubt. Der Gegenkörper des stirnseitigen Kontakts wird in der vorliegenden Arbeit als „Flansch“ bezeichnet. Die Zusammenhänge werden durch Abb. 1.6 nochmals verdeutlicht.

## 1.3 Problemstellung

Infolge der zur Funktionserfüllung eines kraftschlüssig arbeitenden Freilaufs erforderlichen hohen Klemmnormalkräfte kommt es zu einer radialen Zusatzlast am stirnseitig befestigten Freilauf. Diese zusätzlich zu den Umfangskräften infolge der Drehmomentübertragung wirkenden radialen Zusatzkräfte sind bei der Auslegung der stirnseitigen Befestigung zu berücksichtigen.

Wie bereits beschrieben, wird der Freilaufaußenring im Sperrbetrieb durch die



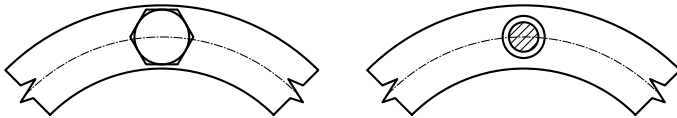


Abb. 1.7: Schraube am Freilaufaußenring nach Montage

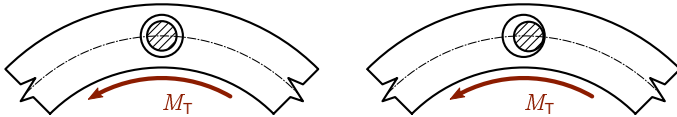


Abb. 1.8: Einseitige Anlage der Schraube am Freilaufaußenring unter Drehmomentbelastung

Klemmnormalkräfte  $F_{NK}$  in radialer Richtung belastet. Dies führt zu einer elastischen Aufweitung des Freilaufaußenrings, welche auf der Seite der stirnseitigen Befestigung durch den Anschlussflansch behindert wird. Wie jede Dehnungsbehinderung wirkt sich dies in Form von Spannungen bzw. Zusatzkräften aus. Die aus der behinderten radialen Aufweitung resultierenden radialen Zusatzkräfte reduzieren hierbei die kraftschlüssige Übertragungsfähigkeit der stirnseitigen Mehrschraubenverbindung.

Dies kann in der Praxis so weit führen, dass der Kraftschluss in der stirnseitigen Befestigung aufgehoben wird und es zu einem Rutschen des Außenrings in Umfangsrichtung kommt. Dies äußert sich durch eine einseitige Anlage der Schrauben, wie sie z.B. nach der Demontage des stirnseitig befestigten Freilaufs festgestellt werden kann. Abb. 1.7 veranschaulicht die mittige Platzierung der Schrauben in der Durchgangsbohrung des Freilaufaußenrings bei der Montage und Abb. 1.8 die nach der Belastung mit dem schwellenden Drehmoment  $M_T$  in einseitige Anlage geratenen Schrauben.

## 1.4 Zielsetzung

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die hinter der Reduktion der kraftschlüssigen Übertragbarkeit stehenden Mechanismen genauer zu beschreiben und somit den Anwendern von stirnseitig befestigten Freiläufen oder ähnlicher Verbindungen, welche

radial aufweitenden Lasten unterliegen, die Möglichkeit zu geben, den Einfluss dieser Lasten auf diese stirnseitigen Verbindungen abzuschätzen.

Dies soll – soweit möglich – über einfach und universell einsetzbare Verfahren geschehen. Alles mit dem Ziel, den Anwendern eine schnelle Abschätzung der stirnseitig übertragbaren Lasten und einen einfachen Vergleich verschiedener Konstruktionsvarianten zu ermöglichen.

## 2 Stand der Technik

In diesem Kapitel wird zum einen eine kurze Einordnung in den Stand der Technik und Forschung gegeben und zum anderen werden die Grundlagen der Berechnung von quer belasteten Schraubenverbindungen nach den gängigen Auslegungsrichtlinien gegeben.

### 2.1 Einordnung in den Stand der Technik und Forschung

Zur stirnseitigen Befestigung von Freiläufen ist keine direkte Forschungstätigkeit bekannt. Die elastomechanische Berechnung von Schraubenverbindungen ist jedoch Bestandteil der VDI-Richtlinie 2230 ([VDI14a] und [VDI14b]), wobei der in dieser Arbeit behandelte Effekt einer radialen Zusatzlast infolge behinderter radialer Aufweitung noch nicht enthalten ist.

Im Bereich der stirnseitigen (Schrauben-)Verbindungen wurden von WALTHER in [Wal07] und [Wal08] Untersuchungen zu Stirnpressverbindungen durchgeführt. Hierbei wurde das „Wandern“ (Mikroschlupf) der Verbindung unter kombinierter Belastung nachgewiesen. Als Ursache hierfür wurde die Ausbildung partieller Schlupfzonen identifiziert, die zu makroskopischen Bewegungen führen. Diese Überlagerung der gewünschten Torsionsübertragung mit Biege- und Querkraftanteilen führte zu Relativbewegungen weit unterhalb der nominellen Rutschbelastung. Diese Ergebnisse sind jedoch nur bedingt auf die vorliegende Forschungstätigkeit übertragbar, da in [Wal07] und [Wal08] eine mikroskopische Betrachtung der Kontaktzustände durchgeführt wurde. In der vorliegenden Arbeit findet jedoch eine globale Betrachtung des Kontakts statt, da die allgemeinen Effekte und Mechanismen, die hinter dem frühzeitigen Rutschen des stirnseitig befestigten Freilaufs stehen, noch unbekannt sind. Eine Betrachtung auf mikroskopischer Kontaktebene der Verhältnisse am stirnseitig befestigten Freilauf wird jedoch als weitere Forschungstätigkeit – aufbauend auf die Erkenntnisse dieser Arbeit – empfohlen.

Flanschverbindungen unter gemischt kraft- und formschlüssiger Drehmomentübertragung wurden unter anderem von MICHLIGK in [Mic88] und GERBER in [Ger91] untersucht. In [Ger91] wurde aufbauend auf die Erkenntnisse von MICHLIGK ein Auslegungskonzept entwickelt, bei dem es vorgesehen ist, die häufig auftretenden Betriebslasten kraftschlüssig und die selten auftretenden Sonderlasten formschlüssig zu übertragen.

Mit dem nichtlinearen Tragverhalten vorgespannter Flanschverschraubungen an Windkraftanlagen haben sich diverse aktuelle Forschungsarbeiten beschäftigt. So haben sich z.B. FELDMANN ET AL. in [FNP11], LEHMANN in [Leh00a], [Leh00b], [Leh03a] und [Leh03b], PETERSEN in [Pet98], SCHAUMANN ET AL. in [SEOS15] und [SES18], SCHMIDT ET AL. in [SN97] sowie SEIDEL und SCHAUMANN in [SS01] und SEIDEL in [Sei01] mit dieser Thematik befasst. Diese sogenannten Ringflanschverbindungen werden global auf Biegung belastet und sind besonders klaffgefährdet. Ähnlichkeiten zu der im Zuge dieser Arbeit untersuchten Thematik bestehen insofern, dass mit elastomechanischen Rechenverfahren eine Berechnung der Verhältnisse an diesen Flanschverbindungen durchgeführt wird, wobei teilweise die Körper durch Kreisringscheiben und Zylinderschalen beschrieben werden. Eine direkte Übertragbarkeit der Ergebnisse dieser Untersuchungen auf die in dieser Arbeit untersuchte Problemstellung ist jedoch nicht gegeben.

Diverse wissenschaftliche Artikel beschäftigen sich mit FE-Untersuchungen an Flanschverschraubungen. So wurden z.B. in [WWXX10] die Schraubenbelastungen an Flanschverschraubungen unter einer globalen Biegebelastung der Flanschverbindung untersucht und in [SRK07] Hinweise zum Aufbau entsprechender FE-Modelle gegeben. Hinweise zur FE-Modellierung von zugbeanspruchten Schraubenverbindungen haben unter anderem auch SCHAUMANN ET AL. in [SKS01] gegeben. Hierbei wurde gezeigt, dass auch mit einer vereinfachten Modellierung der Schrauben als glatte Bolzen mit vereinfachtem Kopf noch gute Ergebnisse erzielbar sind.

In [KBR11] und [ŽB10] wurden Flanschverschraubungen an Drückbehältern bzw. Rohren unter Innendruck simuliert. Während in [KBR11] das Aufklaffen der Verschraubung infolge der sich bei dem untersuchten Behälter ausbildenden Zugkräfte an der Behälterwand untersucht wurde, wurde in [ŽB10] die Dichtigkeit bzw. die Pressung auf die Dichtung an einem halbseitigen Ersatzflanschkörper untersucht.

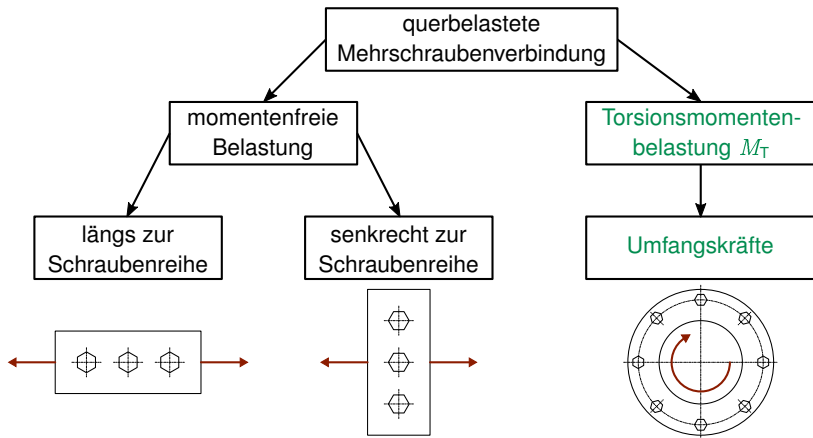


Abb. 2.1: Systematik querbelasteter Schraubenverbindungen nach [VDI14b]

## 2.2 Berechnung quer belasteter Schraubenverbindungen

Der folgende Abschnitt baut maßgeblich auf eine Veröffentlichung [Hof16] des Autors auf.

Unter der Querbelastung von Schrauben ist die Belastung von Schrauben bzw. der Schraubenverbindung quer zur Schraubenlängsachse zu sehen. Die Querbelastung von Schraubenverbindungen stellt einen typischen Belastungsfall im Maschinenbau im Allgemeinen und in der Antriebstechnik im Besonderen dar. Die in dieser Dissertation behandelte stirnseitige Verschraubung von Freiläufen stellt ein Beispiel für ebendiese Belastung von Schrauben dar.

Schraubenverbindungen sind zu den lösbaren, kraftschlüssigen Verbindungen zu zählen. Bei solchen werden die Betriebslasten über den Kraftschluss zwischen den mittels der Schraubenverbindung miteinander verbundenen Teilen übertragen. Im Fall einer quer belasteten Schraubenverbindung sollen demnach die Querkräfte  $F_q$  in der Regel durch den Kraftschluss zwischen den durch die Schraubenvorspannkraft  $F_S$  miteinander verspannten Teilen übertragen werden. Die hier behandelte Schraubenverbindung ist durch ein Torsionsmoment belastet, das zu Umfangskräften an den Schrauben führt. Eine mögliche Einteilung quer belasteter Schraubenverbindungen nach der Art der Belastung zeigt Abb. 2.1.

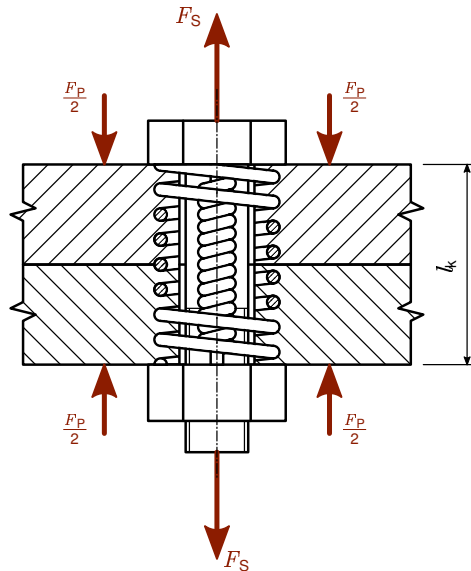


Abb. 2.2: Modellvorstellung einer Schraubenverbindung (Federmodell)

### 2.2.1 Berechnung nach VDI 2230

Die für den Maschinenbau wohl bedeutendste Berechnungsvorschrift für Schraubenverbindungen stellt die VDI-Richtlinie 2230 zur „systematischen Berechnung hochbeanspruchter Schraubenverbindungen“ dar. Die Richtlinie gliedert sich in zwei Teile (Blatt 1 [VDI14a] und Blatt 2 [VDI14b]) auf, wobei der erste Teil das Grundlagenwerk darstellt. Für die Berechnung nach [VDI14a] müssen die an der Schraubenverbindung anliegenden Belastungen auf einzelne Schrauben überführt werden. Die der Berechnung zugrunde liegende Vorstellung ist die zweier gegen-  
einander verspannter Federn, wie sie in Abb. 2.2 dargestellt ist. Die Schraube kann hierbei als Zugfeder angesehen werden, da sie unter Vorspannung gelängt und durch die Schraubenkraft  $F_S$  auf Zug beansprucht wird. Die verspannten Teile (in der Regel als „Flansch“ bezeichnet) werden infolge der Schraubenvorspannung gestaucht und auf Druck beansprucht, wobei sie mit der Flanschkraft  $F_P$  der Schraubenkraft entgegen wirken. Sie werden deshalb in Abb. 2.2 durch eine Druckfeder symbolisiert.

Beim Berechnungsgang für eine Schraubenverbindung nach [VDI14a] werden die

Verformungsverhältnisse an den Verschraubungsstellen berücksichtigt. Dies umfasst neben den reinen Längenänderungen der Schraube und des Flanschs auch die Beeinflussung der Verformungen durch die Betriebslasten. Weiterhin wird in [VDI14a] auch die Problematik der Schraubenmontage behandelt. Bei den heutzutage gängigen Montageverfahren wird in der Regel nur mittelbar über das Anziehmoment auf die Schraubenvorspannung geschlossen. In der Regel geht hierbei ein Großteil der Montagearbeit durch Reibung unter dem Schraubenkopf und im Gewinde verloren, wodurch nur ein Bruchteil des Montagemoments in die gewünschte Montagevorspannung umgesetzt wird. Weiterhin streuen die durch die verschiedenen Anziehverfahren erreichbaren Montagevorspannkräfte. Diese Streuung wird durch den Anziehfaktor  $\alpha_A$  beschrieben. Dieser gibt das Verhältnis zwischen der minimalen  $F_{M,min}$  und der maximalen Montagevorspannkraft  $F_{M,max}$  wieder. Es gilt folglich

$$\alpha_A = \frac{F_{M,max}}{F_{M,min}} . \quad (2.1)$$

Für genauere Ausführungen über die Berechnung der Verformungsverhältnisse und der Montageeinflüsse sei an dieser Stelle auf den Volltext in [VDI14a] verwiesen.

Bezüglich einer Quer- bzw. Scherbelastung von Schrauben sind in [VDI14a] und [VDI14b] mehrere Aussagen zu finden. Zum einen existiert in [VDI14a] die Aussage, dass „es nicht zu Relativbewegungen zwischen der Schraube und/oder den verspannten Teilen (Gleiten) kommen darf. Bei SV [Schraubenverbindungen], wo diese Forderung nicht erfüllt werden kann bzw. nicht besteht, ist bei der Auslegung sicherzustellen, dass bei Überlastung eine eingeschränkte weitere Nutzung möglich ist oder aber andere im Kraftfluss liegende Komponenten durch das Versagen an einer Sollbruchstelle geschützt werden.“<sup>1</sup> Diese Aussage bestärkt den kraftschlüssigen Anspruch an Schraubenverbindungen, es wird jedoch unter bestimmten Voraussetzungen die Benutzung von Schrauben als formschlüssige Verbindungselemente geduldet.

Die Berechnungen nach [VDI14a] gelten nur für „Zylindrische Einschraubenverbindungen“, also einzelne Schrauben. Bevor also auf die kraft- und formschlüssige Berechnung der Einschraubenverbindungen eingegangen wird, ist zu klären, wie aus einer Mehrschraubenverbindung einzelne Schrauben (gedanklich) herausgelöst werden können. Zu dieser Thematik werden bereits in Blatt 1 [VDI14a] Hinwei-

---

<sup>1</sup> Kapitel 5.5.6 in [VDI14a]

se gegeben, welche in Blatt 2 [VDI14b] nochmals detaillierter erläutert werden.

In [VDI14b] werden Hinweise gegeben, wie über Verfahren der Starrkörper- und Elastomechanik oder numerische Methoden (FEM) auf die Lastverteilung und somit die Schraubenbelastung der einzelnen Schrauben von „Mehrschraubenverbindungen“ geschlossen werden kann. Bei Verfahren der Starrkörpermechanik werden nur Axial- und Querkräfte an den Einschraubenverbindungen berücksichtigt, Biegemomente infolge exzentrischer Krafteinleitungen werden jedoch vernachlässigt. Eine genauere Abschätzung der Belastungen an den einzelnen Schrauben einer Mehrschraubenverbindung kann durch die Erweiterung der Betrachtungen um elastische Verformungen und Nachgiebigkeiten erreicht werden. Die grundlegende Vorgehensweise zur analytischen Berechnung von Mehrschraubenverbindungen (MV) und dem anschließenden Herauslösen von Einschraubenverbindungen (EV) nach [VDI14b] ist in Abb. 2.3 dargestellt. Hierzu sei angemerkt, dass sich bei Betrachtung der MV als Starrkörpermodell automatisch ein unterhalb des Schraubenkopfs wirkender ( $n = 1$ ) zentrischer Kraftangriff ( $a = 0$  mm) an der EV ergibt. Hieraus können sich zum Teil erhebliche Unsicherheiten für die ermittelten Belastungen an den anschließend nach [VDI14a] zu berechnenden EV ergeben.

Rotationssymmetrische Schraubenfelder (sogenannte Kreisflansche), stellen einen im Maschinen- und Anlagenbau weitverbreiteten Sonderfall von Mehrschraubenverbindungen dar. Nach [VDI14b] liegen für diese Art der MV in der Regel axial-zentrische, also durch den Schwerpunkt des Schraubenfelds verlaufende Belastungen vor, sodass für diese von einer gleichmäßigen Belastung aller Schrauben des Kreisflansches ausgegangen werden kann. Bei zusätzlicher Belastung mit einem Biegemoment würde sich diese Situation jedoch natürlich ändern. Weist ein Kreisflansch mehrere konzentrische Lochkreise auf, so wird sich die Momentenübertragung auf diese aufteilen. Nach [VDI14b] ist hierbei zu beachten, dass „die höchstbelastete Verschraubungsstelle nicht zwingend den höchsten Beitrag zur Momentenübertragung liefert.“<sup>2</sup>

Einen besonderen Einfluss auf die Lastaufteilung an Schraubenfeldern unter Torsionsbelastung hat die relative Lage der  $n_S$  Verschraubungsstellen zu den Stellen der Momenteneinleitung und -ausleitung. Wird das Moment  $M_T$  sowohl innerhalb des Schraubenfelds eingeleitet als auch ausgeleitet, so lässt sich nach [VDI14b] die daraus am Lochkreis  $r_{T,i}$  resultierende Querbelastrung  $F_{q,i}$  nach Gleichung (2.2)

---

<sup>2</sup>Anhang A1 in [VDI14b]



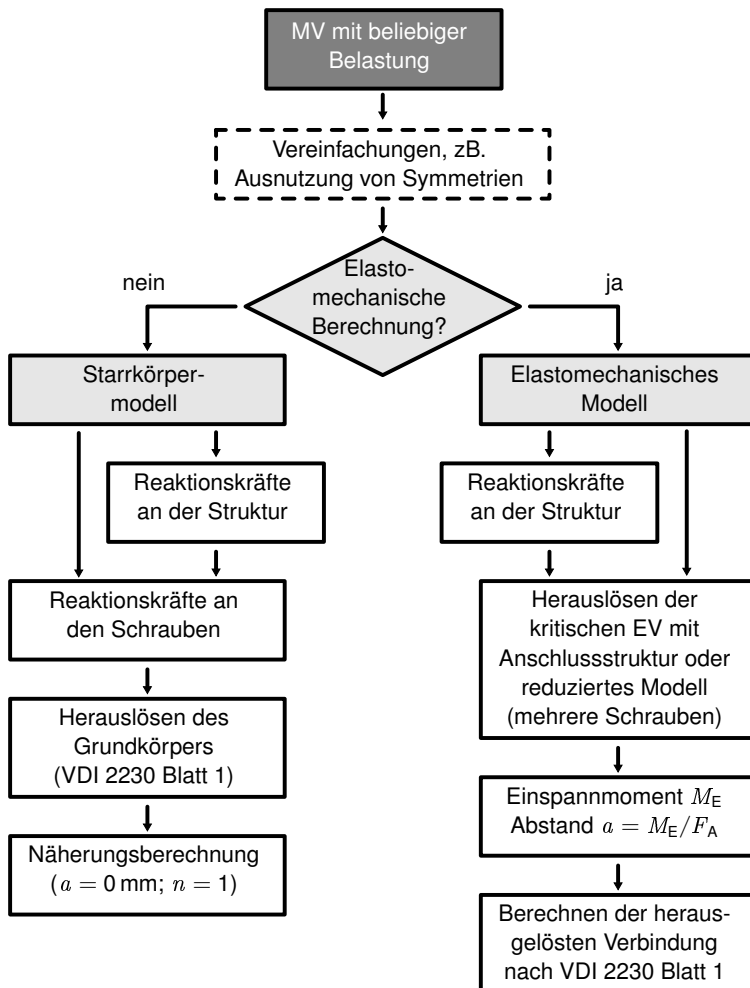


Abb. 2.3: Grundlegende Vorgehensweise zur analytischen Berechnung von MV und Herauslösen einer EV nach [VDI14b]

bestimmen. Weiterhin folgt aus Gleichung (2.2), dass sich die höchsten Belastungen am kleinsten Lochkreis  $r_{T,min}$  des Kreisflansches ergeben. In diesem Fall sind zwar die Schrauben auf einem Teilkreis gleichbelastet, die Belastung der Schrauben verschiedener Teilkreise kann jedoch durchaus unterschiedlich ausfallen.

$$F_{q,i} = \frac{M_T}{n_S \cdot r_{T,i}} \quad (2.2)$$

Wird das Moment wiederum sowohl außerhalb des Schraubenfelds eingeleitet als auch ausgeleitet, so gilt nach [VDI14b] für die sich ergebenden Querbelastrungen die Gleichung (2.3).

$$F_{q,i} = \frac{M_T \cdot r_{T,i}}{\sum_{i=0}^{n_S} r_{T,i}^2} \quad (2.3)$$

Die höchstbelastete Einschraubenverbindung liegt somit auf dem größten Lochkreis. Liegt eine Mischung aus außen- und innenliegender Momentenein- und -ausleitung vor, so ist mit Gleichung (2.2) zu rechnen.

Anzumerken ist, dass für die Einstellung des berechneten Kräftegleichgewichts ein geringer Schlupf (Relativverschiebung) in der Trennfuge erforderlich ist. Dieser verhält sich direkt proportional zum Lochkreisradius. Ist eine schlupffreie Drehmomentübertragung erforderlich oder eventuell konstruktiv sichergestellt, so ist nur mit dem Lochkreis als lasttragend zu rechnen, der den geringsten Abstand von der Lasteinleitungsstelle hat.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass in Blatt 2 [VDI14b] eine Abgrenzung zu den im Stahlbau üblichen Berechnungsregeln (nach DIN EN 1090-2 [EN1090] und DIN EN 1993-1-8 [EC3a]) vorgenommen wurde. Diese besagt, dass die „Schraube grundsätzlich von einer Scherbelastung (ausgenommen Passschrauben) frei zu halten“<sup>3</sup> ist. Im Betrieb ist deshalb höchstensfalls geringer Schlupf zwischen Verbindungselementen und/oder verspannten Teilen zulässig. Diese Aussage entspricht den Grundaussagen von Blatt 1 [VDI14a], wird jedoch von der oben bereits beschriebenen Ausnahme in [VDI14b] ebenfalls eingeschränkt.

Nach [VDI14a] kann bei kreisförmigen Flanschverbindungen unter Torsionsbelastung, unabhängig von der Schraubenanzahl, von einer gleichmäßigen Lastverteilung auch für Scherbelastungen ausgegangen werden. Eine ausreichende Sicherheit der verspannten Teile gegen Ausfall durch Versagen in Querkraftrichtung ist

---

<sup>3</sup>Kapitel 6.3.1.2 in [VDI14b]

Tab. 2.1: Mindestabstände für abschersichere Schraubenverbindungen nach [VDI14a] (als Vielfache des Durchmessers  $d_h$  der Schraubendurchgangsbohrung)

	Randabstand	Lochabstand
<b>In Querkraftrichtung</b>	$3,0 \cdot d_h$	$3,0 \cdot d_h$
<b>Senkrecht zur Querkraftrichtung</b>	$1,5 \cdot d_h$	$3,0 \cdot d_h$

Tab. 2.2: Scherfestigkeiten für Schrauben nach [Tho84]

	Festigkeitsklasse nach [ISO898]				
	4.6	5.6	8.8	10.9	12.9
$\tau_B / R_m$	0,70	0,70	0,65	0,62	0,60
$\tau_B$ in MPa	280	350	520	620	720

gegeben, wenn die in Tab. 2.1 angegebenen Mindestabstände zwischen den einzelnen Schrauben und Körperkanten eingehalten werden.

Nach Überschreiten der Haftreibung geraten die Schrauben in Anlage und werden auf Scherung beansprucht. Die hierbei maximal ertragbare Scherbelastung hängt natürlich von der Scherfestigkeit  $\tau_B$  der Schraube ab. Für Schrauben mit Festigkeitsklassen nach DIN EN ISO 898-1 [ISO898] gelten nach THOMALA [Tho84] die in Tab. 2.2 wiedergegebenen (Mindest-)Scherfestigkeiten.

Je nach Lage der Trennfuge bzw. Scherfuge ist mit dem entsprechend an dieser Stelle vorhandenen Scherquerschnitt  $A_\tau$  zu rechnen. Liegt der Schaft in der Scherfuge, ist für den Scherquerschnitt mit dem an dieser Stelle liegenden Schaftdurchmesser  $d_i$  zu rechnen. Liegt das Gewinde in dem auf Scherung beanspruchten Bereich, so ist nach [VDI14a] mit dem Spannungsquerschnitt  $A_S$  zu rechnen.

Nach [VDI14a] ist davon auszugehen, dass sich die Vorspannkraft bis zum Versagen der Verbindung weitestgehend abbauen wird. Deshalb kann der Einfluss der Vorspannkraft auf die maximal zulässige Scherkraft  $F_{Q,zul,S}$  vernachlässigt werden und es kann für die Schrauben eines querbelasteten Schraubenfelds einheitlich angenommen werden:

$$F_{Q,zul,S} = A_\tau \cdot \frac{\tau_B}{S_A} \quad (2.4)$$

Hierbei stellt  $S_A$  die gewünschte Sicherheit gegen Abscheren dar. Bei einer kombi-

nierten Zug- und Scherbelastung ist eine Berücksichtigung beider Anteile nur dann erforderlich, wenn beide Anteile 25 % der jeweils zulässigen Grenzkkräfte überschreiten.

Neben dem Abscheren der Schrauben stellt die plastische Verformung der Durchgangsbohrung bzw. in Sonderfällen der Schrauben die sogenannte Lochleibung eine weitere wichtige Ausfallursache für querbelastete Schraubenverbindungen dar. Nach [VDI14a] ist bei ausreichenden Rand- und Lochabständen nach Tab. 2.1 und typischen Flanschdicken  $h$  von mindestens dem 0,2-fachen des Durchmessers der Schraubendurchgangsbohrung  $d_h$  von einer gleichmäßigen Beanspruchungsverteilung innerhalb der Bohrung auszugehen. Mit der Streckgrenze des in der Regel niedrigfesteren Bauteilwerkstoffs  $R_{p0,2}$  ergibt sich für die maximal ohne plastische Verformung übertragbare Querkraft  $F_{Q,zul,L}$  der in Gleichung (2.5) wiedergegebene Zusammenhang.

$$F_{Q,zul,L} = h \cdot d_\tau \cdot \frac{R_{p0,2}}{S_L} \quad (2.5)$$

Hierbei ist  $d_\tau$  der in der Durchgangsbohrung wirkende Durchmesser der Schraube und  $S_L$  die Sicherheit gegen plastische Verformung durch Lochleibungsdruck. Bei hoch vorgespannten Schraubenverbindungen kann unter Verweis auf [EC3a] und infolge der an der Bohrungsoberfläche vorherrschenden Druckspannungen die Grenzbelastung um das bis zu 2,5-fache erhöht werden. Werden wiederum die in Tab. 2.1 angegebenen Randabstände nicht eingehalten, verringert sich die zulässige Lochleibungskraft um die Hälfte.

Stoßartige dynamische Belastungen mit wechselnder Lastrichtung sind durch geeignete Maßnahmen zu verhindern. Weiterhin ist dynamischer Mikroschlupf (und die damit verbundene Reibkorrosion) durch eine ausreichende Gleitfestigkeit oder andere Maßnahmen zu vermeiden.

Für eine gleitfeste Verbindung nach [VDI14a] ist eine erforderliche Mindestklemmkraft sicherzustellen, welche bei einer Haftreibungszahl  $\mu$  in den  $q_F$  kraftübertragenden Trennfugen die angreifende Querkraft  $F_Q$  und/oder in den  $q_M$  drehmomentübertragenden Trennfugen das Drehmoment  $M_T$  übertragen kann. Für die erforderliche Mindestklemmkraft  $F_{K,Q,erf}$  gilt:

$$F_{K,Q,erf} = \frac{F_Q}{q_F \cdot \mu} + \frac{M_T}{q_M \cdot r_T \cdot \mu} \quad (2.6)$$

Die erforderliche Mindestklemmkraft muss durch die nach der Schraubenmontage

verbleibende minimale Restklemmkraft  $F_{KR,min}$  sichergestellt werden. Die minimale Restklemmkraft in der Trennfuge berechnet sich nach [VDI14a] zu:

$$F_{KR,min} = \frac{F_{M,zul}}{\alpha_A} - F_{PA} \quad (2.7)$$

Die minimale Restklemmkraft ergibt sich somit aus der maximal zulässigen Montagekraft  $F_{M,zul}$ , vermindert um die Unsicherheit des Anziehverfahrens, ausgedrückt durch den Anziehungsfaktor  $\alpha_A$ , und die Flanschentlastungskraft  $F_{PA}$ . In der Flanschentlastungskraft ist die Entlastung der Trennfuge infolge der Betriebskräfte, eventuell auftretender Setzeffekte und thermischer Zusatzkräfte berücksichtigt. Letztlich kann somit eine Grenzgleitkraft  $F_{Q,zul,\mu}$  mit einer Sicherheit gegen Gleiten  $S_G$  berechnet werden:

$$F_{Q,zul,\mu} = \mu \cdot \frac{F_{KR,min}}{S_G} \quad (2.8)$$

Eine Hauptproblematik bei der Berechnung von Schraubenverbindungen bzw. kraftschlüssigen Verbindungen im Allgemeinen ist die bestmögliche Schätzung der wirkenden Reibwerte. Hierzu sind in [VDI14a] Richtwerte unter Hinweis auf eine empfohlene experimentelle Absicherung gegeben. Üblicherweise können zwischen technischen Oberflächen unter trockener Reibung Haftreibwerte von  $0,1 \leq \mu \leq 1,0$  auftreten.

In [VDI14a] werden für schwingend und zugleich formschlüssig beanspruchte Passschrauben folgende Aussagen zur Dauerfestigkeit getroffen: Die lastübertragende Trennfuge muss im Bereich des Passschafts liegen und es kann mit einer Dauerfestigkeit von  $\tau_D = 23 \text{ MPa}$  gerechnet werden<sup>4</sup>.

### 2.2.2 Berechnung nach DIN EN 1993 (Eurocode 3)

Um die Unterschiede und Gemeinsamkeiten bezüglich der Berechnung querbelasteter Schraubenverbindungen besser herausstellen zu können, werden im Folgenden – soweit möglich und sinnvoll – die im Maschinenbau üblichen Begrifflichkeiten verwendet.

Die unter dem Namen „Eurocode 3“ (EC3) bekannten Normen für die „Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten“ stellen die gängige Berechnungsgrundlage für Schraubenverbindungen im Stahlbau dar, wobei hier Schrauben im „Teil 1-8: Be-

<sup>4</sup>Kapitel 5.5.6.4 in [VDI14a]

messung von Anschlüssen“ [EC3a] der Richtlinie behandelt werden.

Während im Maschinenbau Schrauben in so gut wie allen Fällen vorgespannt werden, wird im Stahlbau zwischen planmäßig vorgespannten, nicht planmäßig vorgespannten und nicht vorgespannten Verbindungen unterschieden. Weiterhin wird im Stahlbau in der Regel von Schraubengarnituren gesprochen, diese bestehen aus einer Schraube mit einer Mutter und je nach Bedarf einer oder mehreren Scheiben, wobei nach DIN EN 1090-2 [EN1090] bei Schrauben der Festigkeitsklasse 8.8 die Scheiben an der Seite angebracht werden müssen, an der die Schraubenverbindungen beim planmäßigen Vorspannen gedreht wird. Bei Schrauben der Festigkeitsklasse 10.9 sind sowohl unterhalb des Schraubenkopfs als auch unterhalb der Mutter Scheiben vorzusehen. Weiterhin dürfen planmäßig vorgespannte Schraubengarnituren nicht mit zusätzlichen Sicherungselementen versehen werden.

Nach [EN1090] sind nicht planmäßig vorgespannte Schrauben mindestens handfest und derart anzuziehen, dass die miteinander zu verbindenden Bauteile eine weitgehend flächige Anlage erreichen. Demgegenüber sind nach [EN1090] planmäßig vorgespannte Schrauben mit einer Mindestvorspannkraft  $F_{p,C}$  anzuziehen, die 70 % der Zugfestigkeit  $R_m$  der Schraube im der Schraubengröße entsprechenden Spannungsquerschnitt  $A_S$  ausnutzt. Hierzu sei angemerkt, dass die typischen Schraubengrößen im Stahlbau erst bei M12 beginnen. Soll die Schraubenverbindung gleitfest (also kraftschlüssig) ausgelegt werden, so ist dieses Vorspannkraftniveau einzuhalten. Weiterhin sind nach [EN1090] für die Sicherstellung eines möglichst hohen Reibwerts die Oberflächen der zu verbindenden Bauteile, zu reinigen und von Graten oder eventuell vorhandenen („übermäßig dicken“) Farbanstrichen zu befreien. Für dementsprechend vorbereitete Kontaktflächen können nach [EN1090] die in Tab. 2.3 aufgeführten Haftreibwerte angenommen werden.

Nach [EC3a] können querbelastete Schraubenverbindungen in drei Kategorien aufgeteilt werden:

- Kategorie A:            Scher-/Lochleibungsverbindungen
- Kategorie B:            Gleitfeste Verbindungen im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit
- Kategorie C:            Gleitfeste Verbindungen im Grenzzustand der Tragfähigkeit

Tab. 2.3: Anzunehmende Haftreibwerte für Reibflächen nach [EN1090]

Oberflächenbehandlung	Haftreibwert $\mu$
kugel- oder sandgestrahlte Oberflächen, loser Rost entfernt, nicht körnig	0,5
kugel- oder sandgestrahlte Oberflächen: <ul style="list-style-type: none"> <li>• spritzaluminisiert oder mit zinkbasiertem Produkt spritzverzinkt</li> <li>• mit Alkali-Zink-Silikat-Anstrich versehen (Dicke von 50 <math>\mu\text{m}</math> bis 80 <math>\mu\text{m}</math>)</li> </ul>	0,4
mittels Drahtbürsten oder Flammstrahlen gereinigte Oberflächen, loser Rost entfernt	0,3
Oberflächen im Walzzustand	0,2

Schraubenverbindungen der Kategorie A können als formschlüssige Verbindungen bezeichnet werden. Als solche bedürfen sie in der Regel keiner Vorspannung oder besonderen Oberflächenbehandlung zur Sicherstellung eines (Mindest-) Haftreibwerts. Verwendet werden können Schrauben der Festigkeitsklassen 4.6 bis 10.9. Aufgrund der mit zunehmender Festigkeit abnehmenden Zähigkeit ist von der Verwendung von Schrauben der Festigkeitsklasse 12.9 abzusehen. Dies gilt insbesondere bei möglicher formschlüssiger Belastung.

Als Belastungsgrenzen sind bei formschlüssiger Beanspruchung, wie bereits bei der VDI 2230 [VDI14a], die Schertragfähigkeit und der Lochleibungswiderstand zu berücksichtigen. Für die Schertragfähigkeit bzw. die damit verbundene maximal zulässige Scherkraft  $F_{v,Rd}$  gilt nach EC3 [EC3a]:

$$F_{v,Rd} = A_{\tau} \cdot \frac{\alpha_v \cdot R_m}{S_A} \quad (2.9)$$

Hierbei ist  $R_m$  die Zugfestigkeit der verwendeten Schraube,  $A_{\tau}$  der entsprechend wirkende Scherquerschnitt (Berechnung wie nach [VDI14a]) und  $S_A$  die Sicherheit gegen Abscheren. Der Faktor  $\alpha_v$  gibt das Verhältnis zwischen der Scherfestigkeit  $\tau_B$  und der Zugfestigkeit der Schraube  $R_m$  an. Im Gegensatz zu den Aussagen in [VDI14a], die auf [Tho84] aufbauen (vergleiche Tab. 2.2), werden in [EC3a] leicht unterschiedliche Werte für die Scherfestigkeitsverhältnisse angegeben (siehe Tab. 2.4).

Weiterhin werden in [EC3a] abhängig von der Lage der Scherfuge unterschiedliche

Tab. 2.4: Scherfestigkeiten für Schrauben mit Gewinden in der Scherfuge (in diesem Fall ist als Scherquerschnitt  $A_\tau$  der Spannungsquerschnitt  $A_S$  anzusetzen) nach [EC3a]

	Festigkeitsklasse nach [ISO898]						
	4.6	4.8	5.6	5.8	6.8	8.8	10.9
$\alpha_v$	0,6	0,5	0,6	0,5	0,5	0,6	0,5
$\tau_B$ in MPa	240	200	300	250	300	480	500

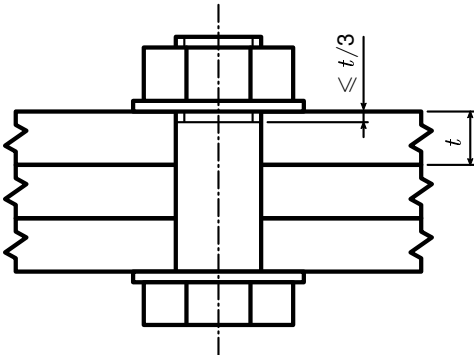


Abb. 2.4: In Schraubenloch hineinragendes Gewinde einer Passschraube nach [EC3a]

Werte angegeben. Liegt das Gewinde innerhalb der Scherfläche, so ist bei einem hohen Streckgrenzenverhältnis mit einer geringeren Scherfestigkeit für Schrauben gleicher Zugfestigkeit zu rechnen. Liegt stattdessen der Schraubenschaft in der Scherfuge, so gilt für  $\alpha_v$  in diesem Fall ein einheitlicher Wert von 0,6.

Werden Passschrauben verwendet, so darf nach [EC3a] das Gewinde in der Regel nicht in der Scherfuge liegen. Weiterhin sollte die Länge des auf Lochleibung beanspruchten Gewindes nicht mehr als 1/3 der Blechdicke  $t$  des beanspruchten Blechs betragen. Abb. 2.4 stellt diese Aussage nochmals bildlich dar.

Für die Lochleibungstragfähigkeit  $F_{b,Rd}$  gilt nach [EC3a] die folgende Formel:

$$F_{b,Rd} = k_t \cdot \alpha_b \cdot \frac{R_m}{S_A} \cdot d \cdot t \tag{2.10}$$

Auffallend ist, dass nach [EC3a] mit der Zugfestigkeit  $R_m$  der verspannten Bauteile



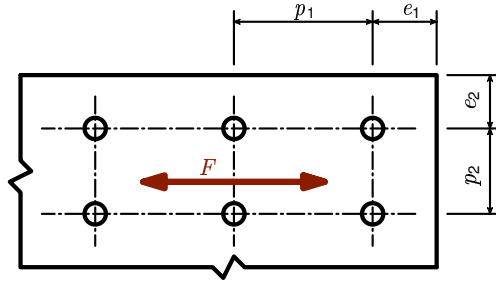


Abb. 2.5: Bezeichnung der Rand- und Lochabstände nach [EC3a]

gerechnet wird, anstatt wie bei [VDI14a] mit der Streckgrenze. Für den Faktor  $\alpha_b$  ist mit dem kleinsten Wert aus  $\alpha_d$ , dem Verhältnis der Zugfestigkeiten von Schraube zu verspannten Teilen  $R_{m,Schraube}/R_{m,Flansch}$  oder dem Wert 1,0 zu rechnen. Der Faktor  $\alpha_d$  beträgt für in Krafrichtung am Rand eines Schraubenfelds liegende Schrauben mit dem Abstand zum Rand  $e_1$  und dem Durchmesser der Durchgangsbohrung  $d_h$

$$\alpha_d = \frac{e_1}{3 \cdot d_h} \quad (2.11)$$

und für innen liegende Schrauben, mit dem Lochabstand  $p_1$

$$\alpha_d = \frac{p_1}{3 \cdot d_h} - \frac{1}{4} \quad (2.12)$$

Der Faktor  $k_1$  ist bei quer zur Krafrichtung am Rand liegenden Schrauben mit dem kleinsten Wert aus Gleichung (2.13) anzusetzen, wobei  $e_2$  der Randabstand und  $p_2$  der Lochabstand ist (siehe hierzu Abb. 2.5).

$$k_1 = \min \left( 2,8 \cdot \frac{e_2}{d_h} - 1,7; 1,4 \cdot \frac{p_2}{d_h} - 1,7; 2,5 \right) \quad (2.13)$$

Für quer zur Krafrichtung innenliegende Schrauben gilt für  $k_1$

$$k_1 = \min \left( 1,4 \cdot \frac{p_2}{d_h} - 1,7; 2,5 \right) \quad (2.14)$$

Die nach [EC3a] für Abb. 2.5 minimal einzuhaltenden Rand- und Lochabstände bei statischer Belastung sind in Tab. 2.5 wiedergegeben.

Für dynamische Belastungen (Ermüdungsbelastung) erhöhen sich die nach [EC3a]

Tab. 2.5: Mindestabstände nach [EC3a] für statische Belastungen (als Vielfache des Durchmessers  $d_h$  der Schraubendurchgangsbohrung)

	Randabstand	Lochabstand
In Querkraftrichtung	$1,2 \cdot d_h$	$2,2 \cdot d_h$
Senkrecht zur Querkraftrichtung	$1,2 \cdot d_h$	$2,4 \cdot d_h$

Tab. 2.6: Mindestabstände nach [EC3a] für Ermüdungsbelastung (als Vielfache des Durchmessers  $d_h$  der Schraubendurchgangsbohrung)

	Randabstand	Lochabstand
In Querkraftrichtung	$1,5 \cdot d_h$	$2,5 \cdot d_h$
Senkrecht zur Querkraftrichtung	$1,5 \cdot d_h$	$2,5 \cdot d_h$

einzuhaltenden Rand- und Lochabstände und es gelten die in Tab. 2.6 aufgeführten Mindestabstände.

Liegt eine Kombination von Scher- ( $F_Q$ ) und Zugbelastung ( $F_Z$ ) vor, so ist die Interaktion mit folgender Formel zu berücksichtigen:

$$\frac{F_Q}{F_{V,Rd}} + \frac{F_Z}{1,4 \cdot F_{t,Rd}} \leq 1,0 \tag{2.15}$$

Hierbei ist  $F_{t,Rd}$  die zulässige Grenzkraft für eine Zugbelastung der Schrauben.

Nach [EC3a] darf die Beanspruchbarkeit einer Schraubengruppe als Summe der Lochleibungstragfähigkeiten  $F_{b,Rd}$  der einzelnen Schrauben angenommen werden, sofern die Abschertragfähigkeiten  $F_{V,Rd}$  der einzelnen Schrauben mindestens so groß sind wie die jeweilige Lochleibungstragfähigkeit. Ist dies nicht der Fall, so ist die Anzahl der Schrauben mit der kleinsten in der Gruppe vorhandenen Abscher- bzw. Lochleibungstragfähigkeit zu multiplizieren, um die Übertragungsfähigkeit der Schraubenverbindung zu bestimmen.

Dynamische Belastungen und die für diese Fälle geltenden Auslegungsformeln werden in Teil 1-9 [EC3b] von EC3 behandelt. Querbelasteten Schrauben in ein- oder zweischnittigen Scher-Lochleibungsverbindungen ist nach [EC3b] die Kerbfallzahl  $\Delta\tau_C = 100\text{ MPa}$  zugeordnet. Diese gilt, wenn das Gewinde nicht in der Scherfläche liegt und Schrauben der Festigkeitsklassen 5.6, 8.8 oder 10.9 ohne Lastumkehr dynamisch belastet werden. Die wirkende dynamische Schubbe-

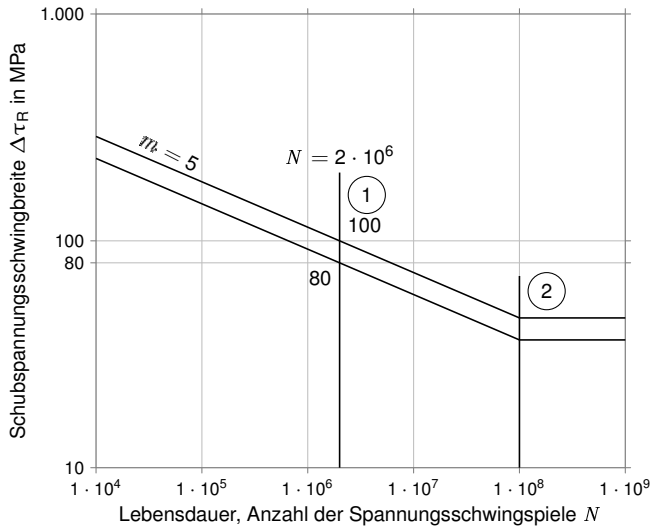


Abb. 2.6: Ermüdungsfestigkeitskurve für Schubspannungsschwingbreiten nach [EC3b]

anspruchung  $\Delta\tau$  ist hierbei am Schaftquerschnitt zu ermitteln. [EC3b] gibt eine anzunehmende Wöhlerkurve für Schubbeanspruchungen  $\Delta\tau_R$  an, anhand derer auch eine zeitfeste Auslegung querbelasteter Schraubenverbindungen möglich ist. Die Kerbfallzahl ist hierbei als diejenige Spannungsamplitude (Schubspannungsschwingbreite) definiert, die mit  $2 \cdot 10^6$  Schwingspielen ertragbar ist (Position ① in Abb. 2.6). Der Abknickpunkt für die nach [EC3b] dauerhaft ertragbare Schubbeanspruchung  $\Delta\tau_L$  (Schwellenwert der Ermüdungsfestigkeit; Position ② in Abb. 2.6) ist bei  $10^8$  Schwingspielen definiert und errechnet sich aus der zugeordneten Kerbfallzahl zu

$$\Delta\tau_L = 0,457 \cdot \Delta\tau_C = 45,7 \text{ MPa} \quad . \quad (2.16)$$

Wie oben bereits erwähnt, unterscheidet [EC3a] zwischen drei Kategorien querbelasteter Schraubenverbindungen. Während die bisher diskutierte Kategorie A den formschlüssigen Verbindungen zuzuordnen ist, stellen die Kategorien B und C (gleitfeste Verbindungen) kraft- bzw. reibschlüssige Verbindungen dar. Die Kategorien B und C unterscheiden sich hierbei nur durch die anzusetzenden Sicherheiten.

Nach [EC3a] sind für gleitfeste Verbindungen Schrauben der Festigkeitsklassen 8.8

und 10.9 mit kontrollierter Vorspannung zu verwenden. Die Vorspannkraft  $F_{p,C}$  wird hierbei in der Regel auf eine 70 % Ausnutzung der Zugfestigkeit  $R_m$  der Schraube in ihrem Spannungsquerschnitt  $A_S$  ausgelegt.

$$F_{p,C} = 0,7 \cdot R_m \cdot A_S \quad (2.17)$$

Werden die für diesen Anwendungsfall im Maschinenbau eher unüblichen Langlöcher außer Acht gelassen, so errechnet sich die maximal reibschlüssig übertragbare Querkraft (Gleitwiderstand)  $F_{s,Rd}$  nach [EC3a] zu

$$F_{s,Rd} = \frac{n_R \cdot \mu}{S_G} \cdot F_{p,C} \quad (2.18)$$

Hier ist  $S_G$  die Sicherheit gegen Gleiten und  $n_R$  die Anzahl der Reiboberflächen. Der wirkende Haftreibwert  $\mu$  kann dabei nach Tab. 2.3 ([EN1090]) angenommen werden.

Wird eine gleitfeste Verbindung zusätzlich zur Scherkraft  $F_Q$  durch eine Zugkraft  $F_Z$  belastet, wird sich die wirkende Vorspannung in der Verbindung verringern und sich dementsprechend ein geringerer Gleitwiderstand ergeben. Dieser Effekt wird nach [EC3a] durch einen für den Regelfall anzuwenden pauschalen Ansatz berücksichtigt. Hierbei wird angenommen, dass 80 % der einwirkenden Zugkraft  $F_Z$  eine direkte Verringerung der Vorspannkraft  $F_{p,C}$  bewirken. Es gilt in diesem Fall

$$F_{s,Rd} = \frac{n_R \cdot \mu}{S_G} \cdot (F_{p,C} - 0,8 \cdot F_Z) \quad (2.19)$$

Prinzipiell sind sich die Berechnungsweisen querbelasteter Schraubenverbindungen nach VDI 2230 ([VDI14a] und [VDI14b]) und EC3 ([EC3a] und [EC3b]) sehr ähnlich. Im Detail sind jedoch einige Unterschiede zu finden, die im Folgenden kurz zusammengefasst werden sollen.

Ein erster Unterschied sind die in EC3 gegenüber denen in VDI 2230 höheren Reibwertniveaus und die höheren dynamischen Scherfestigkeiten. Weiterhin sind auch die statischen Scherfestigkeiten unterschiedlich, diese sind jedoch in diesem Fall in EC3 (siehe Tab. 2.4) geringer als in VDI 2230 (siehe Tab. 2.2). Ebenso sind die einzuhaltenden Mindestrand- und -lochatstände nach EC3 (siehe Tab. 2.5 und Tab. 2.6) geringer als nach VDI 2230 (siehe Tab. 2.1).

Während in VDI 2230 Hinweise gegeben werden, wie an Mehrschraubenverbindungen die am höchsten belasteten Schrauben bestimmt werden, sind in EC3

keinerlei derartige Hinweise zu finden. Die reibschlüssige Schraubenberechnung nach VDI 2230 bietet die Möglichkeit, viele Einflussfaktoren und Effekte auf die Vorspannkraft zu berücksichtigen. Die entsprechenden Berechnungen nach EC3 beschränken sich hierbei auf die Haupteffekte.

Ein Hauptunterschied zwischen beiden Berechnungswerken bezüglich des obig behandelten Spezialfalls ist jedoch, dass in EC3 eine formschlüssige Beanspruchung querbelasteter Schrauben explizit vorgesehen ist, während dies in VDI 2230 nur in Ausnahmefällen zulässig ist.

Abschließend sei angemerkt, dass die im Zuge dieser Arbeit wiedergegebenen Aussagen zur Auslegung und Berechnung querbelasteter Schraubenverbindungen nur einen Auszug aus den gängigen Normen und Richtlinien zu diesem Thema darstellen. Für detaillierte Ausführungen und besonders im Zweifel sei auf die Originaltexte der hier zitierten Normen und Richtlinien verwiesen.



## 3 Grundlagen der Technischen Mechanik

Im Folgenden sollen die wichtigsten Grundlagen für das Verständnis der in Kapitel 5 beschriebenen elastomechanischen Rechenmodelle kurz dargelegt werden. Allen Berechnungen liegen die folgenden allgemeinen Annahmen zugrunde:

- Alle Körper zeigen linear-elastisches, isotropes Materialverhalten.
- Die Körper erfahren nur kleine Verschiebungen und Verzerrungen.

Nach z.B. GROSS ET AL. [GHSW07] kann trotz der mit diesen Annahmen einhergehenden Vereinfachungen ein großer Bereich der praktisch auftretenden Ingenieurprobleme abgedeckt werden. Im Zuge dieser Arbeit wird demnach eine Theorie 1. Ordnung angewendet, d.h. die Gleichgewichtsbedingungen der einzelnen Körper können am unverformten System aufgestellt werden. Weiterhin ist dadurch eine Superposition verschiedener Lastfälle möglich.

### 3.1 Rotationssymmetrische Körper

Der Freilaufaußenring und in der Regel auch der Anschlussflansch sind Rotationskörper und können als ein Verbund von Hohlzylindern und anderen rotationssymmetrischen Körpern geometrisch beschrieben werden. Aufgrund dieses Umstands werden im Folgenden soweit möglich und sinnvoll die Grundgrößen der Technischen Mechanik direkt für ein zylindrisches Koordinatensystem aufgestellt.

#### 3.1.1 Räumlicher Spannungszustand

An einem infinitesimalen Volumenelement im Inneren eines belasteten aber sich grundsätzlich im Gleichgewicht befindlichen zylindrischen Körpers greifen im räumlichen Spannungszustand die Spannungskomponenten  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{r\varphi}$ ,  $\tau_{rz}$ ,  $\tau_{\varphi r}$ ,

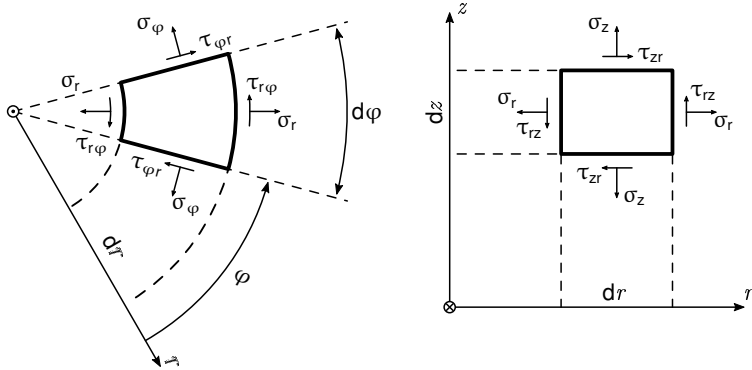


Abb. 3.1: Spannungskomponenten an einem infinitesimalen zylindrischen Volumenelement (Ebene  $\varphi$ - $z$  nicht dargestellt)

$\tau_{z\varphi}$ ,  $\tau_{zr}$  und  $\tau_{z\varphi}$  an. Aus dem Gleichgewicht der Drehmomente am in Abb. 3.1 dargestellten infinitesimalen Volumenelement ergibt sich der bekannte *Satz von der Gleichheit der Schubspannungen* (vgl. z.B. GIRKMANN [Gir86]). Es gilt also folglich

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} \quad \wedge \quad \tau_{rz} = \tau_{zr} \quad \wedge \quad \tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi} \quad (3.1)$$

und es verbleiben insgesamt 6 unabhängige Spannungskomponenten, welche den Spannungszustand eines Körpers vollständig beschreiben. Diese können auch im Spannungstensor  $\underline{\underline{T}}$  für den räumlichen Spannungszustand (allgemeiner Fall) zusammengefasst werden.

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\varphi} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\varphi} & \sigma_\varphi & \tau_{\varphi z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\varphi z} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

### 3.1.2 Räumlicher Verzerrungszustand

Unter der Annahme eines isotropen und homogen Werkstoffs sowie den in Kapitel 3 genannten Annahmen gilt das HOOKEsche Gesetz für den räumlichen Spannungs-Dehnungs-Zustand. Es gelten demnach die folgenden Beziehungen



zwischen Spannungen und Dehnungen/Verzerrungen:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_r - \nu \cdot (\sigma_\varphi + \sigma_z)] \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_\varphi - \nu \cdot (\sigma_r + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_r + \sigma_\varphi)] \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Mit dem Schubmodul  $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$  gelten weiterhin die folgenden Beziehungen zwischen den Schubspannungen  $\tau$  und den durch sie verursachten Gleitungen  $\gamma$ :

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{r\varphi} &= \frac{\tau_{r\varphi}}{G} \\ \gamma_{\varphi z} &= \frac{\tau_{\varphi z}}{G} \\ \gamma_{rz} &= \frac{\tau_{rz}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Die Gleitungen  $\gamma$  stellen anschaulich die Winkeländerungen an den Ecken des verformten Volumenelements dar. Die Verzerrungen (Dehnungen und halbe Gleitungen) können im Verzerrungstensor  $\underline{\underline{E}}$  für den allgemeinen, räumlichen Verzerrungszustand zusammengefasst werden.

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & \varepsilon_{r\varphi} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{r\varphi} & \varepsilon_\varphi & \varepsilon_{\varphi z} \\ \varepsilon_{rz} & \varepsilon_{\varphi z} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{r\varphi} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{rz} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{r\varphi} & \varepsilon_\varphi & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{\varphi z} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{rz} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{\varphi z} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Die in den Gleichungen (3.3) und (3.4) ausgedrückten Zusammenhänge zwischen Spannungen und Verzerrungen können auch in Tensorschreibweise ausgedrückt werden. Es gilt hierbei für lineare isotrope Elastizität:

$$\underline{\underline{T}} = 2 \cdot G \cdot \left( \underline{\underline{E}} + \frac{\nu}{1 - 2 \cdot \nu} \cdot \text{tr}(\underline{\underline{E}}) \cdot \underline{\underline{1}} \right) \quad (3.6)$$

Da zwischen den Komponenten des Verzerrungstensors  $\underline{\underline{E}}$  und des Spannungstensors  $\underline{\underline{T}}$  über die Materialkonstanten (E-Modul  $E$  und Querkontraktionszahl  $\nu$ ) direkte Abhängigkeiten bestehen, weist der Verzerrungstensor ebenfalls 6 voneinander unabhängige Komponenten auf.

### 3.1.3 Kinematische Beziehungen am zylindrischen Volumenelement

Zwischen den Verzerrungen (Dehnungen  $\varepsilon$  und Gleitungen  $\gamma$ ) und den Verschiebungen ( $u, v, w$ ) bestehen feste Beziehungen, die sich über die Kinematik an einem beliebig verformten rotationssymmetrischen Hohlzylinder ergeben. Die Verschiebung eines beliebigen Punktes  $P$  innerhalb eines infinitesimalen Volumenelements kann über den Verschiebungsvektor  $\underline{U}$  beschrieben werden. Die einzelnen Komponenten dieses Vektors sind die Verschiebungen  $u, v$  und  $w$  entlang der Zylinderkoordinaten  $r, \varphi$  und  $z$ .

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Für die allgemeinen Verzerrungen (räumlicher Verzerrungszustand in Zylinderkoordinaten) und die Verschiebungen gelten die folgenden Zusammenhänge, wie sie z.B. in [Gir86] beschrieben sind:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{r\varphi} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \\ \gamma_{\varphi z} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Mit diesen Zusammenhängen, die auch als *geometrische Bedingungen* bezeichnet werden können, kann der Verzerrungstensor aus Gleichung (3.5) auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) & \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) & \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} & \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Die kinematische Beziehung zwischen dem Verschiebungsvektor  $\underline{U}$  und dem Verzerrungstensor  $\underline{E}$  kann auch in Tensorschreibweise ausgedrückt werden:

$$\underline{E} = \frac{1}{2} \cdot (\text{grad}(\underline{U}) + \text{grad}^T(\underline{U})) \quad (3.11)$$

Der Verzerrungstensor ist, wie bereits der Spannungstensor  $\underline{T}$ , symmetrisch (d.h. es gilt  $\underline{E} = \underline{E}^T$ ) und beschreibt die sich infolge einer beliebigen Verschiebung ergebenden Verzerrungen unter der Bedingung, dass sich die körperlichen Zusammenhänge innerhalb der Volumenelemente nicht ändern. Dies bedeutet anschaulich, dass über diesen Gleichungssatz sichergestellt ist, dass vor der Verformung des Körpers benachbarte Punkte auch nach der Verformung noch entsprechend benachbart bleiben.

### 3.1.4 Verträglichkeitsbedingungen

Die 6 unabhängigen Komponenten des Verzerrungstensors  $\underline{E}$  können also durch die 3 möglichen Verschiebungen  $\underline{U}$  des beliebigen Punktes  $P$  beschrieben werden. Für eine eindeutige Beschreibung der 3 Verschiebungen aus den 6 Verzerrungen sind jedoch noch 3 weitere *Verträglichkeitsbedingungen* erforderlich. Diese können durch entsprechende Differentiation der Terme aus den Gleichungen (3.8) und (3.9) hergeleitet werden. Mögliche Verträglichkeitsbedingungen für den allgemeinen zylindrischen Verzerrungszustand sind:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{r\varphi}}{\partial r \cdot \partial \varphi} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi}}{\partial r^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{\varphi z}}{\partial \varphi \cdot \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial \varphi^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial r \cdot \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

### 3.1.5 Gleichgewichtsbedingungen

Unter der Annahme eines nun nicht mehr konstanten, sondern ortsabhängigen zylindrischen Spannungszustands ergeben sich unter Berücksichtigung von angreifenden Volumenkräften  $V_r$ ,  $V_{\varphi}$  und  $V_z$  (z.B. Gewicht- oder Fliehkräfte) die

folgenden drei Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + V_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{2 \cdot \tau_{r\varphi}}{r} + V_\varphi &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + V_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Auch die Gleichgewichtsbedingungen können in Tensorschreibweise in einer einzigen Gleichung zusammengefasst werden. Es gilt:

$$\operatorname{div}(\underline{T}) + \underline{V} = \operatorname{div}(\underline{T}) + \rho \cdot \underline{k} = \underline{0} \quad (3.14)$$

Die Volumenkräfte  $\underline{V}$  können auch über die Dichte  $\rho$  des Körpers verknüpft mit einem entsprechenden Kraftfeld  $\underline{k}$  ausgedrückt werden. Für die im Zuge dieser Arbeit untersuchten Belastungsfälle sind die Volumenkräfte gegenüber den von außen angreifenden Kräften jedoch im Allgemeinen vernachlässigbar.

### 3.2 Randwertproblem der Technischen Mechanik

Mit den bisher genannten Formeln und Gleichungen kann der Spannungs- und Verformungszustand eines Körpers vollständig beschrieben werden. Für die hierzu notwendigen 15 Größen (6 Spannungen, 6 Verzerrungen und 3 Verschiebungen) stehen 3 Gleichgewichtsbedingungen (3.13), 6 geometrische Bedingungen (3.8) und (3.9) und 6 Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen (3.3) und (3.4) zur Verfügung.

Das Randwertproblem der Technischen Mechanik kann nun über die Vorgabe von Verschiebungsrandbedingungen (in diesem Fall also DIRICHLETSche Randbedingungen) oder Spannungsrandbedingungen (in diesem Fall NEUMANNsche Randbedingungen) gelöst werden. Abb. 3.2 zeigt einen beliebigen Körper (der Dichte  $\rho$ ) in einem Kraftfeld, ausgedrückt über den Vektor  $\underline{k}$ . Auf einem Teil des Rands gelten die Verschiebungsrandbedingungen

$$\underline{U} = \overline{\underline{U}} \quad \text{auf } A^u \quad (3.15)$$

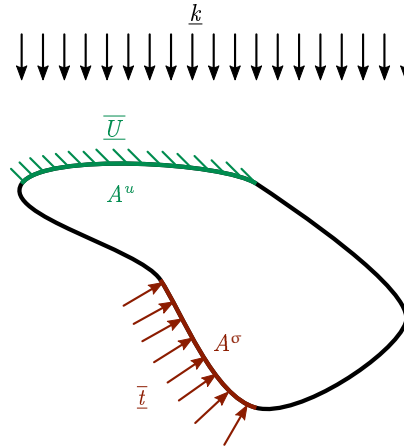


Abb. 3.2: Körper mit Verschiebungs- und Spannungsrandbedingungen in einem Kraftfeld

und auf einem anderen Teil des Rands wirken die Spannungsrandbedingungen

$$\underline{t} = \underline{T} \cdot \underline{n} = \overline{t} \quad \text{auf } A^\sigma, \quad (3.16)$$

wobei der Spannungszustand  $\underline{T}$  durch den Flächennormalenvektor  $\underline{n}$  mit dem Spannungsvektor  $\underline{t}$  auf der Fläche  $A^\sigma$  verknüpft ist.

Eine geschlossene analytische Lösung des durch die Gleichungen (3.6), (3.11) und (3.14) beschriebenen allgemeinen Randwertproblems ist jedoch nur sehr schwer und in der Regel gar nicht möglich.<sup>1</sup> Aus dieser Problematik ergeben sich zwei Lösungsansätze:

- Zum einen können für das allgemeine Randwertproblem Vereinfachungen im Spannungs- oder Verzerrungszustand eingeführt werden, um eine geschlossene analytische Lösung zu ermöglichen. Entsprechende Ansätze stellen das im Zuge dieser Arbeit entstandene kombinierte Kreisring-Schalenmodell (siehe Abschnitt 5.3) und auch das einfache Federmodell (siehe Abschnitt 5.2) dar.
- Zum anderen kann die Lösung über numerische Verfahren approximiert wer-

<sup>1</sup>[Gir86]

den. Beispielhaft seien hier das Verfahren der Finiten-Elemente-Methode (FEM, siehe Abschnitt 5.1) und als historischer Vorläufer der FEM das RITZsche Näherungsverfahren genannt.

### 3.3 Prinzip der virtuellen Arbeit

Das *Prinzip der virtuellen Arbeit* stellt ein wichtiges Grundprinzip der Technischen Mechanik dar. Als virtuelle Arbeit wird nach MESKOURIS und HAKE [MH09] diejenige Arbeit bezeichnet, die durch gedachte (virtuelle) Kraftgrößen entlang wirklicher (realer) Verschiebungen oder durch reale Kraftgrößen entlang virtueller Verschiebungen ( $\delta \underline{U}$ ) geleistet wird. Dementsprechend kann weiterhin zwischen dem *Prinzip der virtuellen Verschiebungen* und dem *Prinzip der virtuellen Kräfte* unterschieden werden, wobei beide auf der Verschiebungsarbeit basieren.

Ausgedrückt als *Prinzip der virtuellen Verschiebungen* in Tensorschreibweise kann es z.B. nach [GHSW07] folgendermaßen formuliert werden:

$$\int_A \underline{t} \cdot \delta \underline{U}^T \cdot dA + \int_V \rho \cdot \underline{k} \cdot \delta \underline{U}^T \cdot dV = \int_V \underline{T} \bullet \delta \underline{E} \cdot dV \quad (3.17)$$

Anschaulich bedeutet Gleichung (3.17), dass die Arbeit der äußeren Kräfte  $\delta W_a$  (aufgebrachte Lasten  $\int_A \underline{t} \cdot \delta \underline{U}^T \cdot dA$  und Volumenkräfte  $\int_V \rho \cdot \underline{k} \cdot \delta \underline{U}^T \cdot dV$ ) an einem sich im Gleichgewicht befindlichen System gleich der Arbeit der inneren Kräfte (Schnittkräfte)  $\delta W_i = \int_V \underline{T} \bullet \delta \underline{E} \cdot dV$  ist. Dementsprechend kann es auch einfach über die Arbeiten ausgedrückt werden:

$$\delta W_a = \delta W_i \quad (3.18)$$

#### 3.3.1 Vorzeichendefinition an rotationssymmetrischen Körpern

Eine positive Radialverschiebung  $u$  findet am rotationssymmetrischen Körper in Abb. 3.3 nach außen statt. Der axiale Weg  $z$  ist von der rechten Seite ausgehend nach links (also in den Körper hinein) positiv definiert, dementsprechend wirkt eine positive Randlast  $R$  am rechten Rand nach außen und ein positives Randmoment  $M$  ist rechtsdrehend.

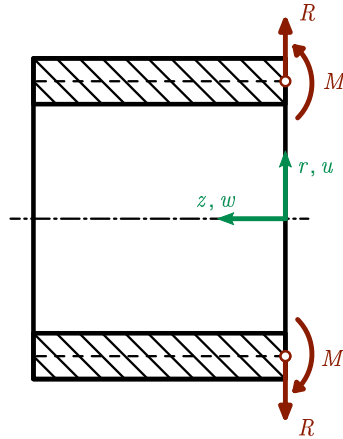


Abb. 3.3: Vorzeichendefinition an rotationssymmetrischem Körper mit Randlasten am rechten (positiven) Rand

### 3.3.2 Kraftgrößenverfahren

Das sogenannte Kraftgrößenverfahren baut auf dem Prinzip der virtuellen Arbeit und den Sätzen von BETTI und MAXWELL auf.<sup>2</sup> Der Satz von BETTI besagt anschaulich, dass die Verschiebungsarbeit an einem linear elastischen System, welche von der Last  $X_1$  am Ort der Last  $X_2$  geleistet wird, gleich der von der Last  $X_2$  am Ort von  $X_1$  geleisteten ist. Mithilfe dieses Satzes ist es möglich, die Kräfte an einem System nacheinander zu betrachten und später in ihrer Wirkung zu überlagern (Superpositionsprinzip). Der Satz von MAXWELL stellt einen Sonderfall des Satzes von BETTI dar, bei dem mit „normierten“ Einheitslasten  $X_1 = X_2 = 1$  gerechnet wird. In diesem Fall können die Indizes der Formänderungswerte  $\delta_{ik}$  vertauscht werden, weshalb dieser Satz auch z.B. in [MH09] als „Satz von der Vertauschbarkeit der Indizes“ bezeichnet wird.

Mit dem Kraftgrößenverfahren ist es möglich, statisch überbestimmte Systeme zu berechnen, indem diese durch äquivalente (also die gleichen Verformungen ermöglichende) statisch bestimmte Systeme ersetzt werden, an die die nun überzähligen Lasten als sogenannte „unbekannte Schnittgrößen“ oder „Kraftgrößen“ angetragen werden. Nach z.B. MESKOURIS [MH09] bzw. HAKE [HM01] können die  $n$  unbekann-

<sup>2</sup>[Sch68]

ten Schnittgrößen (Kraftgrößen)  $X_k$  durch Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\delta_{i0} + \sum_{k=1}^n X_k \cdot \delta_{ik} = 0 \quad (3.19)$$

bestimmt werden. Die Größen  $\delta_{ik}$  stellen die sogenannten Formänderungswerte dar und sind folgendermaßen zu lesen:

- $\delta_{i0}$  sind die lastabhängigen Verformungen, also die Verformungen infolge der äußeren Lasten.
- $\delta_{ik}$  für  $k = 1 \dots n$  sind die Verformungen infolge der virtuellen Lasten  $X_k = 1$ .
- Der Index  $i$  hat hierbei drei Bedeutungen. Er gibt sowohl die Art als auch den Ort und die positive Richtung der Formänderungsgröße wieder:
  - Ist  $X_i$  eine Kraft, so stellt  $\delta_{ik}$  die Verschiebung an der Stelle  $i$  in Richtung von  $X_i$  dar.
  - Ist  $X_i$  ein Moment, so stellt  $\delta_{ik}$  die Verdrehung an der Stelle  $i$  in Richtung von  $X_i$  dar.
  - Für ein Kräftepaar  $X_i$  ergibt sich  $\delta_{ik}$  als gegenseitige Verschiebung der Schnittpuffer an der Stelle  $i$  in Richtung von  $X_i$ .
  - Für ein Momentenpaar  $X_i$  ergibt sich  $\delta_{ik}$  als gegenseitige Verdrehung der Schnittpuffer an der Stelle  $i$  in Richtung von  $X_i$ .

Das Gleichungssystem (3.19) („System der Elastizitätsgleichungen“) kann nach [MH09] auch mit Matrizen formuliert werden:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \vdots \\ \delta_{n0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\underline{\underline{\delta}} \cdot \underline{X} + \underline{\underline{\delta}}_0 = 0 \quad (3.21)$$

Die Matrix  $\underline{\underline{\delta}}$  ist hierbei quadratisch ( $n \times n$ ) und für Systeme, für die der Satz von MAXWELL bzw. BETTI gilt, symmetrisch ( $\delta_{ki} = \delta_{ik}$ ). Die Glieder auf der Hauptdiagonalen  $\delta_{ii}$  sind weiterhin immer positiv, da die Verschiebungen bzw. Verdrehun-




gen infolge der  $X_i$  immer in Richtung des entsprechenden  $X_i$  erfolgen. Sofern die Determinante nicht verschwindet, was in der Regel erfüllt ist (also gilt  $\det(\underline{\delta}) \neq 0$ ), kann der Vektor der statisch unbestimmten  $X_i$  durch Invertierung bestimmt werden:

$$\underline{X} = -\underline{\delta}^{-1} \cdot \underline{\delta}_0 \quad (3.22)$$

### 3.4 Kreisring mit Rechteckquerschnitt

Für die analytische Berechnung der Verformungen und der Kräfte am stirnseitig befestigten Freilauf ist die Kenntnis einiger weiterer speziellen Theorien der Technischen Mechanik hilfreich. Einige Effekte innerhalb des stirnseitigen Verbunds aus Freilaufaußenring und Flansch lassen sich z.B. gut über die Eigenschaften von kreisringförmigen Platten bzw. Scheiben, sogenannten Kreisringen, beschreiben. Im Folgenden werden nur die in dieser Arbeit relevanten Belastungsfälle einer angreifenden Radialkraft oder eines Biegemoments diskutiert.

#### 3.4.1 Kreisring unter rotationssymmetrischen Schwerpunktlasten

Unter der Annahme einer rotationssymmetrischen Belastung lassen sich nach [HM01] für einen Kreisring die angreifenden Randkräfte und -momente auf die durch den Schwerpunkt  der Ringquerschnittsfläche verlaufende Ringachse beziehen. Abb. 3.4 zeigt eine Kreisringscheibe mit einer am Schwerpunkt angreifenden bezogenen<sup>3</sup> Radialkraft  $R_S$  sowie einem ebenfalls am Schwerpunkt angreifenden bezogenen Randmoment  $M_S$  (auch Krempelmoment genannt).

Die Kreisringscheibe wird durch ihren Innen- und Außendurchmesser bzw. die zugehörigen Radien  $r_i$  und  $r_a$  sowie die Breite  $B$  geometrisch beschrieben. Aus diesen Größen lassen sich zum einen die Wandstärke  $H$  sowie der Schwerpunktradius  $r_S$  berechnen. Die Wandstärke der Kreisringscheibe  $H$  ergibt sich aus der Differenz der Radien von Außen- und Innendurchmesser. Es gilt demnach:

$$H = r_a - r_i \quad (3.23)$$

Der Schwerpunktradius  $r_S$ , welcher gleichbedeutend mit dem Radius der Mittelflä-

<sup>3</sup>In der Baustatik werden rotationssymmetrische Lasten an Kreisringen oder auch Schalen in der Regel auf den Umfang bezogen, an dem sie angreifen, ähnlich einer Streckenlast bei stabförmigen Bauteilen.

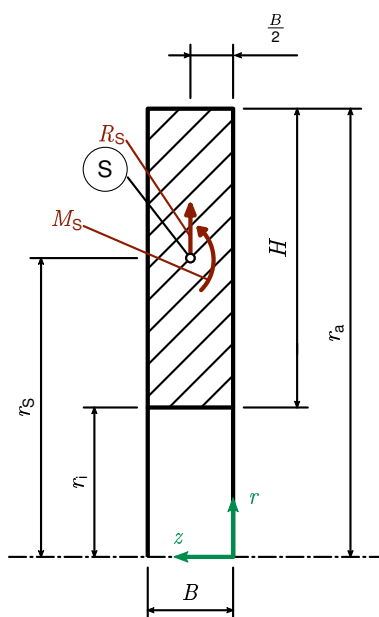


Abb. 3.4: Kreisringscheibe mit Schwerpunktlasten

che ist, errechnet sich für einen Kreisring mit rechteckigem Querschnitt als Mittelwert der beiden Radien des Außen- ( $D = 2 \cdot r_a$ ) und Innendurchmessers ( $d = 2 \cdot r_i$ ). Es gilt folglich für den in Abb. 3.4 dargestellten Kreisring:

$$r_S = \frac{r_a + r_i}{2} \quad (3.24)$$

Die Schwerpunktlasten in Abb. 3.4 sind in positiver Richtung angetragen, d.h. die Radialkraft  $R_S$  wirken in positiver Richtung von  $r$  (nach außen) und das Kreppelmoment  $M_S$  wirkt im positiven Drehsinn des von  $z$  und  $r$  aufgespannten (rechtsdrehenden) Koordinatensystems, wobei der Nullpunkt der axialen Koordinate  $z$  am rechten Rand definiert ist.

Für den Lastfall einer am Schwerpunktradius  $r_S$  angreifenden Radialkraft  $R_S$  ergibt sich nach [HM01] eine Radialverformung in Höhe von

$$\Delta r_S = \frac{R_S \cdot r_S^2}{E \cdot H \cdot B} \quad . \quad (3.25)$$

Der Berechnung eines Kreisrings liegt die Annahme zugrunde, dass sich der Querschnitt nicht verformt, also alle Punkte des Querschnitts in diesem Fall die gleiche Radialverformung  $\Delta r_S$  erfahren. Unter der gleichen Annahme ergibt sich infolge des am Umfang des Schwerpunktradius angreifenden Kreppelmoments eine Verdrehung des Rechteckquerschnitts nach [HM01] in Höhe von

$$\varphi = \frac{12 \cdot M_S \cdot r_S^2}{E \cdot H \cdot B^3} \quad . \quad (3.26)$$

Die Verdrehung um den Schwerpunkt (S) des Querschnitts ruft an jedem Punkt des Querschnitts ebenfalls eine Radialverschiebung hervor. Diese ist allein abhängig vom Abstand des entsprechenden Punkts in  $z$ -Richtung vom Schwerpunkt S. Dementsprechend ergibt sich z.B. für den rechten Rand des in Abb. 3.4 dargestellten Kreisrings mit Rechteckquerschnitt eine zusätzliche Radialverschiebung nach außen um

$$\Delta r = \varphi \cdot \frac{B}{2} \quad (3.27)$$

und gleichzeitig eine zusätzliche Radialverschiebung am linken Rand um den gleichen Betrag

$$-\Delta r = -\varphi \cdot \frac{B}{2} \quad (3.28)$$

nach innen.

Die Radialverschiebung des rechten Rands in Folge der am Schwerpunkt S angreifenden Lasten  $R_S$  und  $M_S$  beträgt demnach

$$\Delta r_r = \frac{R_S \cdot r_S^2}{E \cdot H \cdot B} + \frac{6 \cdot M_S \cdot r_S^2}{E \cdot H \cdot B^2} \quad (3.29)$$

und für den linken Rand ergibt sich eine Radialverschiebung infolge der Schwerpunktlasten von

$$\Delta r_l = \frac{R_S \cdot r_S^2}{E \cdot H \cdot B} - \frac{6 \cdot M_S \cdot r_S^2}{E \cdot H \cdot B^2} \quad . \quad (3.30)$$

### 3.4.2 Kreisring unter beliebiger rotationssymmetrischer Belastung

Greifen die Lasten (Radialkraft und Kreppelmoment) an einem beliebigen Punkt an, so können diese Lasten wieder auf die oben beschriebenen Schwerpunktlasten zurückgeführt werden. In Abb. 3.5 wird der Kreisring sowohl durch eine am beliebigen Radius  $r_{rm}$  angreifende Radialkraft  $R$  als auch ein am selben Radius angreifendes Kreppelmoment  $M$  belastet.

Greifen die Lasten im Abstand  $c$  in  $z$ -Richtung vom Schwerpunkt an, so bewirkt die Radialkraft  $R$  einen zusätzlichen Momentenanteil ( $R \cdot c$ ). Die Lasten können nach [HM01] einfach in äquivalente Schwerpunktlasten überführt werden, indem die auf den beliebigen Kraftangriffsradius  $r_{rm}$  bezogenen Kräfte und Momente auf den Schwerpunktradius  $r_S$  bezogen (umgerechnet) werden. Es gilt demnach für die sich ergebenden Schwerpunktlasten

$$R_S = R \cdot \frac{r_{rm}}{r_S} \quad (3.31)$$

und

$$M_S = (M + R \cdot c) \cdot \frac{r_{rm}}{r_S} \quad . \quad (3.32)$$

Für das in dieser Arbeit angewendete Rechenverfahren (siehe Kapitel 5) sind besonders die Radialverschiebungen des rechten ( $\Delta r_r$ ) und des linken Rands ( $\Delta r_l$ ) von Bedeutung. Wie bereits in Kapitel 3.4.1 beschrieben, ergibt sich aus der angreifenden positiven Radiallast  $R$  eine Radialverschiebung aller Punkte des Kreisringquerschnitts um den Betrag  $\Delta r_S$ . Dieser beträgt in diesem Fall

$$\Delta r_S = \frac{R \cdot r_S \cdot r_{rm}}{E \cdot H \cdot B} \quad . \quad (3.33)$$

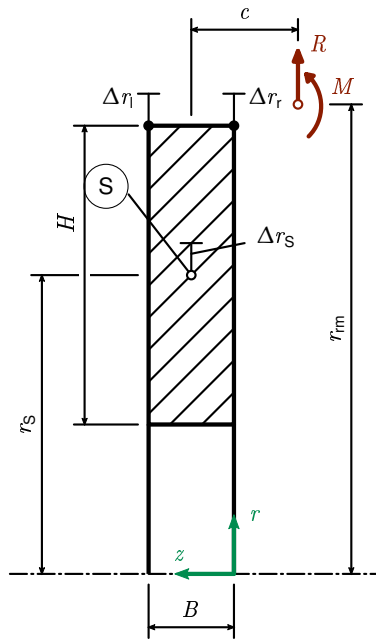


Abb. 3.5: Kreisringscheibe mit beliebigen rotationssymmetrischen Lasten

Aus dem äquivalenten Kreppelmoment  $M_S$  nach Gleichung (3.32) ergibt sich eine Verdrehung des Kreisringquerschnitts um den Schwerpunkt um den Winkel

$$\varphi = \frac{12 \cdot (M + R \cdot c) \cdot r_S \cdot r_{rm}}{E \cdot H \cdot B^3} \quad . \quad (3.34)$$

Anschaulich bedeutet dies, dass sich durch die Verkipfung des Querschnitts um den Winkel  $\varphi$  ein linearer Verlauf der Radialverschiebung (Aufweitung) über die Breite  $B$  des Kreisrings ergibt. Aufgrund der dem Kreisring zugrunde liegenden Annahmen sind keine anderen Aufweitungsverläufe möglich.

Für die späteren Berechnungen ist es sinnvoll, diesen Winkel in die jeweils durch die Radialkraft  $R$  und das Moment  $M$  hervorgerufenen Anteile aufzuspalten. Es gilt demnach für den durch die Radialkraft hervorgerufenen Anteil

$$\varphi_R = \frac{12 \cdot R \cdot c \cdot r_S \cdot r_{rm}}{E \cdot H \cdot B^3} \quad (3.35)$$

und für den durch das Moment hervorgerufenen Anteil

$$\varphi_M = \frac{12 \cdot M \cdot r_S \cdot r_{rm}}{E \cdot H \cdot B^3} \quad . \quad (3.36)$$

Dementsprechend folgt für die Radialverschiebung des rechten Rands

$$\begin{aligned} \Delta r_r &= \Delta r_S + (\varphi_R + \varphi_M) \cdot \frac{B}{2} \\ &= \frac{R \cdot r_S \cdot r_{rm}}{E \cdot H \cdot B} \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot c}{B}\right) + \frac{6 \cdot M \cdot r_S \cdot r_{rm}}{E \cdot H \cdot B^2} \end{aligned} \quad (3.37)$$

und analog für die Verschiebung des linken Rands

$$\begin{aligned} \Delta r_l &= \Delta r_S - (\varphi_R + \varphi_M) \cdot \frac{B}{2} \\ &= \frac{R \cdot r_S \cdot r_{rm}}{E \cdot H \cdot B} \cdot \left(1 - \frac{6 \cdot c}{B}\right) - \frac{6 \cdot M \cdot r_S \cdot r_{rm}}{E \cdot H \cdot B^2} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Für den Fall einer am rechten Rand angreifenden positiven Radiallast beträgt der Abstand  $c = \frac{B}{2}$  und die Gleichungen (3.37) und (3.38) vereinfachen sich zu:

$$\Delta r_r = \frac{4 \cdot R \cdot r_S \cdot r_{rm}}{E \cdot H \cdot B} + \frac{6 \cdot M \cdot r_S \cdot r_{rm}}{E \cdot H \cdot B^2} \quad (3.39)$$

$$\Delta r_l = -\frac{2 \cdot R \cdot r_S \cdot r_{rm}}{E \cdot H \cdot B} - \frac{6 \cdot M \cdot r_S \cdot r_{rm}}{E \cdot H \cdot B^2} \quad (3.40)$$

## 3.5 Schalentheorie

Für die analytische Beschreibung der Mechanismen und Effekte am stirnseitig befestigten Freilauf ist weiterhin die Schalentheorie hilfreich. Als Schale wird in der Technischen Mechanik ein gekrümmtes Flächentragwerk bezeichnet, dessen Wandstärke im Vergleich zu den anderen Abmessungen klein ist. Eine Schale ist demnach durch ihre Mittelfläche und die Wandstärke geometrisch beschreibbar. Im vorliegenden Fall reicht es aus, sich auf den Sonderfall der rotationssymmetrisch belasteten Zylinderschalen zu beschränken, deren Grundlagen im Folgenden kurz beschrieben werden sollen.

Für weiterführende Informationen zur Schalentheorie sei auf die bekannte Fachliteratur verwiesen. Als Standardwerke in diesem Bereich seien FLÜGGE [Flü62], GIRKMANN [Gir86], PFLÜGER [Pfl81] und BAŞAR/KRÄTZIG [BK85] genannt. Eine besonders anschauliche und auf die praktische Berechnung ausgelegte Beschreibung mit vielen Beispielen ist HAKE und MESKOURIS in [HM01] gelungen.

### 3.5.1 Dünne Schalen

Bereits in der obigen Definition des Begriffs *Schale* steckt die Annahme einer gegenüber dem Radius der Mittelfläche kleinen Wandstärke. Diese führt mit einigen weiteren Annahmen schlussendlich zur sogenannten „Theorie dünner Schalen“, die auf KIRCHHOFF und LOVE zurückzuführen ist. Nach z.B. PFLÜGER [Pfl81] liegen der „Theorie dünner Schalen“ die folgenden Annahmen zugrunde:

1. Die Normalspannungen senkrecht zur Mittelfläche können vernachlässigt werden.
2. Alle Punkte, die vor der Verformung auf einer Normalen zur Mittelfläche liegen, liegen auch noch nach der Verformung auf einer Geraden.
3. Diese Gerade ist ebenfalls Normale zur verformten Mittelfläche.
4. Die Verformungen sind klein im Vergleich zur Wandstärke.

Die erste Voraussetzung bedeutet, dass nur Spannungen in der Ebene der Mittelfläche betrachtet werden und alle anderen Anteile vernachlässigt werden. Die zweite Voraussetzung ist auch als „BERNOULLI-Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte“ bekannt und die dritte Annahme bedeutet die Vernachlässigung von

Querkraftverformungen. Die vierte Annahme ist bereits eingangs dieses Kapitels formuliert worden und stellt eine klassische Grundannahme für Probleme der Elastizitätstheorie dar.

Für die Berechnung von Schalen sind zwei Spannungszustände maßgebend, über die die Belastungen abgetragen werden. Dies ist zum einen der sogenannte *Membranspannungszustand*, welcher über die „Membrantheorie“ (siehe Abschnitt 3.5.2) beschrieben wird, und zum anderen der *Biegespannungszustand*, welcher wiederum über die „Biegetheorie“ bzw. „technische Biegelehre“ (siehe Abschnitte 3.5.3 und 3.5.4) beschrieben wird. Die Einteilung der beiden Spannungszustände kann bei den Zylinderschalen auch über die Differentialgleichung der Aufweitung erfolgen. Der partikulären Lösung entspricht die „Membrantheorie“ und der homogenen Lösung die „Biegetheorie“.

Als Gültigkeitsgrenze für die „Theorie dünner Schalen“ bzw. die „technische Biegelehre“ wird von RABICH in [Rab63] ein Wert für das Verhältnis von Wandstärke  $H$  zu Radius der Mittelfläche  $r_s$  von 0,2 genannt. Dies entspricht in etwa einem maximalen Verhältnis von Außendurchmesser  $D$  zu Innendurchmesser  $d$  der Schale von

$$\frac{H}{r_s} \leq 0,2 \quad \rightarrow \quad \frac{D}{d} \leq 1,22 \quad . \quad (3.41)$$

### 3.5.2 Membrantheorie

Der Membranzustand ist frei von Biegemomenten und Querkraften und es treten nur Normal- und Schubspannungen in der Schalenfläche auf. Bei rotationssymmetrischen Schalen entfallen weiterhin die Schubspannungen, so dass die Schale nur von den Normalspannungen in Längs- und Umfangsrichtung beansprucht wird (siehe Abb. 3.6). Laut [HM01] darf ein Membranspannungszustand in einer Zylinderschale vorausgesetzt werden, wenn – neben den allgemeinen Annahmen aus Unterabschnitt 3.5.1 – die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Die Schalendicke und deren erste Ableitung müssen stetig sein.
- Die Belastungsfunktion und deren erste Ableitung müssen stetig sein.
- Linienlasten und Auflagerkräfte an den Schalenrändern müssen zentrisch und tangential eingeleitet werden.

Wird eine dieser Annahmen nicht erfüllt, dürfen die Biegemomente und Querkräfte



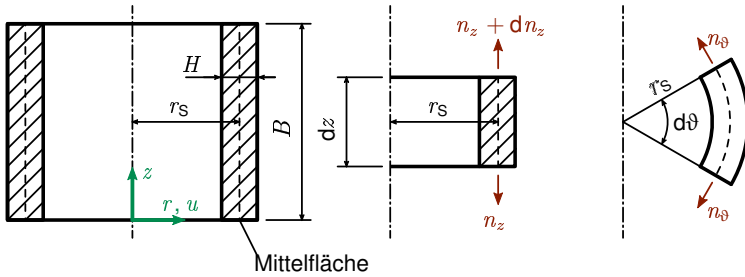


Abb. 3.6: Zylinderschale im Membranzustand nach [HM01]

der Schale nicht mehr vernachlässigt werden und es ist die Berücksichtigung dieser sogenannten „Randstörungen“ über die *Biegetheorie* nötig.

Nach [HM01] gilt gemäß der *Membrantheorie* für die Zylinderschale mit der Wandstärke  $H$  und dem mittleren Radius  $r_S$  aus Abb. 3.6 unter einer rotationssymmetrischen Belastung durch eine auf Druck beanspruchende Axialkraft  $F_{ax}$  und eine in radialer Richtung nach außen wirkende und über die Länge bzw. Breite  $B$  der Zylinderschale stetige Flächenlast (dies entspricht einem Innendruck  $p_i$ ) für die auf die Schalendicke  $H$  bezogenen Membrankräfte (Längs- ( $n_z$ ) und Umfangskräfte ( $n_\vartheta$ )):

$$n_z = -\frac{F_{ax}}{2 \cdot \pi \cdot r_S} \quad (3.42)$$

$$n_\vartheta = p_i \cdot r_S \quad (3.43)$$

Die Membrankräfte (siehe Abb. 3.6) errechnen sich durch die Multiplikation der zugrunde liegenden Spannungen  $\sigma_z$  und  $\sigma_\vartheta$  mit der Schalendicke  $H$ :

$$n_z = H \cdot \sigma_z \quad (3.44)$$

$$n_\vartheta = H \cdot \sigma_\vartheta \quad (3.45)$$

Für die Dehnungen gilt nach dem HOOKEschen Gesetz:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E \cdot H} \cdot (n_z - \nu \cdot n_\vartheta) \quad (3.46)$$

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{1}{E \cdot H} \cdot (n_\vartheta - \nu \cdot n_z) \quad (3.47)$$

Somit ergibt sich für die Radialverschiebung  $u$  bzw.  $\Delta r$ :

$$\Delta r = u = r_S \cdot \varepsilon_\vartheta = \frac{r_S}{E \cdot H} \cdot (n_\vartheta - \nu \cdot n_z) \quad (3.48)$$

Die Verdrehung der Mittelfläche  $\Psi$  ist die Ableitung der Radialverschiebung in Längsrichtung:

$$\Psi = u' = \frac{du}{dz} = \frac{d\Delta r}{dz} \quad (3.49)$$

Weiterhin ergibt sich aus der Axialbelastung eine resultierende Längung bzw. Stauchung in Längsrichtung  $z$ , welche über die Integration der Längsdehnung  $\varepsilon_z$  über die Länge  $B$  der Zylinderschale bestimmt werden kann:

$$\Delta B = \int_0^B \varepsilon_z dz \quad (3.50)$$

Für die Nutzung des Kraftgrößenverfahrens zur Bestimmung der radialen Zusatzkräfte sind nur die Randverformungen von Interesse, weshalb diese in Tab. 3.1 nochmals für den Membranzustand der Zylinderschale und den für diese Arbeit relevanten Lastfall des Innendrucks zusammenfassend aufgeführt sind.

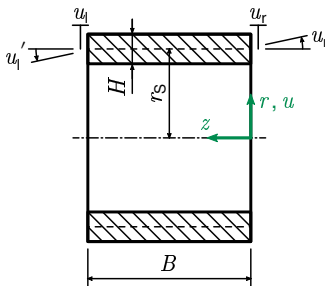
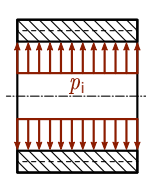
Die weiteren möglichen Lastfälle eines über die Länge der Schale linear veränderlichen Innendrucks (z.B. hydrostatischer Druck bei einem Behälter) oder das Eigengewicht der Schale sind für den zu untersuchenden Fall der infolge der Klemmnormalkräfte  $F_{NK}$  hervorgerufenen radialen Zusatzkraft  $\Delta F_R$  nicht relevant. Ebenso ist der Lastfall einer axialen Verspannung des Freilaufaußenrings durch die Schraubenvorspannung nicht relevant, da die Verspannung über die relevante Reibfuge hinweg erfolgt und darüber hinaus aufgrund der begründeten Annahme geringer Verformungen das Superpositionsprinzip anwendbar ist.

### 3.5.3 Biegetheorie der langen Zylinderschale

Werden die Bedingungen aus Unterabschnitt 3.5.2 verletzt, so ergibt sich eine sogenannte *Randstörung* für die rotationssymmetrische Zylinderschale. Diese Randstörungen rufen einen Biegespannungszustand in der Schale hervor, wie er in Abb. 3.7 dargestellt ist. Dieser Zustand ist durch die in der Schale wirkenden bezogenen Querkräfte  $q$  sowie die Biegemomente  $m_z$  und  $m_\vartheta$  gekennzeichnet.

Eine Randstörung kann eine bezogene Radialkraft  $R$  oder ein am Rand angrei-

Tab. 3.1: Randverformungen von Zylinderschalen unter Innendruck im Membranzustand nach [HM01]

		
konstanter Innendruck		
	$u_r$	$\frac{p_i \cdot r_S^2}{E \cdot H}$
	$u_r'$	0
	$u_l$	$\frac{p_i \cdot r_S^2}{E \cdot H}$
	$u_l'$	0

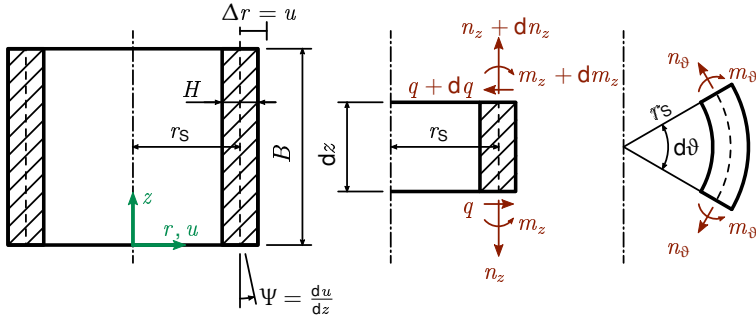


Abb. 3.7: Zylinderschale im Biegezustand nach [HM01]

findendes bezogenes Moment  $M$  sein. Bei langen Schalen findet hierbei keine gegenseitige Beeinflussung der beiden Schalenränder statt. Das bedeutet, dass die durch die Störung des Membranzustands hervorgerufenen Beanspruchungen bis zum gegenüberliegenden Schalenrand bereits abgeklungen sind bzw. annähernd vollständig abgetragen wurden.

Nach [HM01] gilt nach der *Biegetheorie* für die Biegesteifigkeit  $K$  einer Schale mit dem E-Modul  $E$  und der Querkontraktionszahl  $\nu$ :

$$K = \frac{E \cdot H^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (3.51)$$

Für die Differentialgleichung des Biegezustands der durch Randlasten (bezogene Radialkräfte  $R$  und bezogene Randmomente  $M$ ) belasteten Zylinderschale ergibt sich die folgende Differentialgleichung für die Radialverschiebung  $u$ :

$$\frac{d^4 u(z)}{dz^4} + \frac{12 \cdot (1 - \nu^2)}{r_s^2 \cdot H^2} \cdot u(z) = 0 \quad (3.52)$$

Für den Zusammenhang zwischen Radialverschiebung  $\Delta r$  bzw.  $u$  und Verdrehung der Mittelfläche  $\Psi$  gilt weiterhin Gleichung (3.49).

Der Kehrwert  $\lambda$  der charakteristischen Länge der Schale ist definiert als:

$$\lambda = \frac{\sqrt[4]{3 \cdot (1 - \nu^2)}}{\sqrt{r_s \cdot H}} \quad (3.53)$$

Nach Lösung der Differentialgleichung

$$u^{(4)}(z) + 4 \cdot \lambda^4 \cdot u(z) = 0 \quad (3.54)$$

ergibt sich für die einzelnen Schnittgrößen des Biegezustands:

$$n_z = 0 \quad (3.55)$$

$$n_\vartheta(z) = \frac{E \cdot H}{r_S} \cdot u(z) \quad (3.56)$$

$$m_z(z) = K \cdot u''(z) \quad (3.57)$$

$$m_\vartheta(z) = K \cdot v \cdot u''(z) = v \cdot m_z(z) \quad (3.58)$$

$$q(z) = K \cdot u'''(z) \quad (3.59)$$

Hierbei sind die Normalkräfte  $n_z$  und  $n_\vartheta$  sowie die Querkraft  $q$  jeweils auf die Schalendicke  $H$  bezogen. Weiterhin sind die Schnittmomente  $m_z$  und  $m_\vartheta$  ebenfalls auf die Schalendicke  $H$  bezogen.

Nach [HM01] ist es nun sinnvoll, als Ansatz für die Differentialgleichung ein Produkt aus Winkel- und Exponentialfunktion mit dem bezogenen Argument  $\zeta(z) = \lambda \cdot z$  zu wählen:

$$u(z) = e^{-\zeta} \cdot (C_1 \cdot \cos(\zeta) + C_2 \cdot \sin(\zeta)) \quad (3.60)$$

Die ersten sechs Ableitungen dieser Ansatzfunktion lauten demnach:

$$u'(z) = \frac{du}{dz} = -\lambda \cdot e^{-\zeta} \cdot [(C_1 - C_2) \cdot \cos(\zeta) + (C_1 + C_2) \cdot \sin(\zeta)] \quad (3.61)$$

$$u''(z) = \frac{d^2u}{dz^2} = 2 \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\zeta} \cdot (-C_2 \cdot \cos(\zeta) + C_1 \cdot \sin(\zeta)) \quad (3.62)$$

$$u'''(z) = \frac{d^3u}{dz^3} = 2 \cdot \lambda^3 \cdot e^{-\zeta} \cdot [(C_1 + C_2) \cdot \cos(\zeta) - (C_1 - C_2) \cdot \sin(\zeta)] \quad (3.63)$$

$$u^{(4)}(z) = \frac{d^4u}{dz^4} = -4 \cdot \lambda^4 \cdot e^{-\zeta} \cdot [C_1 \cdot \cos(\zeta) + C_2 \cdot \sin(\zeta)] \quad (3.64)$$

$$u^{(5)}(z) = \frac{d^5u}{dz^5} = -4 \cdot \lambda^5 \cdot e^{-\zeta} \cdot [(-C_1 + C_2) \cdot \cos(\zeta) - (C_1 + C_2) \cdot \sin(\zeta)] \quad (3.65)$$

$$u^{(6)}(z) = \frac{d^6u}{dz^6} = 8 \cdot \lambda^6 \cdot e^{-\zeta} \cdot [C_2 \cdot \cos(\zeta) - C_1 \cdot \sin(\zeta)] \quad (3.66)$$

Nach [HM01] sind bei  $\zeta = 2 \cdot \pi$  die Randstörungen so gering, dass sie mit aus-

reichender Genauigkeit gleich Null gesetzt werden können. Bereits ab Werten von  $\zeta \geq 4$  sind die Auswirkungen der Randstörung so gering, dass sie in der Regel vernachlässigt werden können. In diesem Fall wird von einer langen Schale gesprochen.

Für eine Randstörung bei  $z = 0$  durch eine bezogene Radialkraft  $R$  und ein bezogenes Moment  $M$  sind die folgenden Randbedingungen anzunehmen:

$$m_z(0) = M \quad (3.67)$$

$$q(0) = R \quad (3.68)$$

Aus der Lösung für die Randbedingungen ergeben sich die gesuchten Variablen  $C_1$  und  $C_2$ . Für den Lastfall R ergeben sich für die Variablen:

$$C_1 = \frac{R}{2 \cdot K \cdot \lambda^3} \quad (3.69)$$

$$C_2 = 0 \quad (3.70)$$

Für den Lastfall M lauten die Lösungen:

$$C_1 = \frac{M}{2 \cdot K \cdot \lambda^2} \quad (3.71)$$

$$C_2 = -C_1 = -\frac{M}{2 \cdot K \cdot \lambda^2} \quad (3.72)$$

Die Funktionen  $\eta(\zeta)$ ,  $\eta'(\zeta)$ ,  $\eta''(\zeta)$  und  $\eta'''(\zeta)$  sind hierbei Abkürzungen für die folgenden Funktionen:

$$\eta(\zeta) = e^{-\zeta} \cdot (\cos(\zeta) + \sin(\zeta)) \quad (3.73)$$

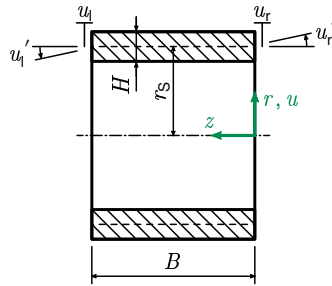
$$\eta'(\zeta) = e^{-\zeta} \cdot \sin(\zeta) \quad (3.74)$$

$$\eta''(\zeta) = e^{-\zeta} \cdot (\cos(\zeta) - \sin(\zeta)) \quad (3.75)$$

$$\eta'''(\zeta) = e^{-\zeta} \cdot \cos(\zeta) \quad (3.76)$$

Werden die Gleichungen jeweils getrennt für die einzelnen Lastfälle (Superpositionsprinzip) gelöst, so ergeben sich für die lange Zylinderschale im Biegezustand die nach [HM01] in Tab. 3.2 dargestellten Schnittgrößen und Randverformungen.

Tab. 3.2: Randverformungen langer rotationssymmetrischer Zylinderschalen ( $\lambda \cdot B \geq 4$ ) im Biegezustand nach [HM01]



$u_r$	$\frac{R}{2 \cdot K \cdot \lambda^3}$	$\frac{M}{2 \cdot K \cdot \lambda^2}$	0	0
$u_r'$	$-\frac{R}{2 \cdot K \cdot \lambda^2}$	$-\frac{M}{2 \cdot K \cdot \lambda}$	0	0
$u_l$	0	0	$\frac{R}{2 \cdot K \cdot \lambda^3}$	$\frac{M}{2 \cdot K \cdot \lambda^2}$
$u_l'$	0	0	$\frac{R}{2 \cdot K \cdot \lambda^2}$	$\frac{M}{2 \cdot K \cdot \lambda}$

### 3.5.4 Biegetheorie der kurzen Zylinderschale

Für eine kurze Zylinderschale, also eine Schale mit einer Länge  $B$ , für welche  $\lambda \cdot B < 4$  gilt, gilt nach [HM01] prinzipiell die gleiche Differentialgleichung und charakteristische Länge wie für die lange Zylinderschale. Es ist jedoch zur Beschreibung der Verformungen ein anderer Ansatz zu wählen, da sich die beiden Ränder gegenseitig beeinflussen:

$$u(z) = C_1 \cdot \cosh(\zeta) \cdot \cos(\zeta) + C_2 \cdot \cosh(\zeta) \cdot \sin(\zeta) + C_3 \cdot \sinh(\zeta) \cdot \cos(\zeta) + C_4 \cdot \sinh(\zeta) \cdot \sin(\zeta) \quad (3.77)$$

Für die ersten sechs Ableitungen dieser Ansatzfunktion nach der Länge  $z$  gilt demnach:

$$\begin{aligned} u'(z) = \frac{du}{dz} &= \lambda \cdot [C_1 \cdot (\sinh(\zeta) \cdot \cos(\zeta) - \cosh(\zeta) \cdot \sin(\zeta)) \\ &\quad + C_2 \cdot (\sinh(\zeta) \cdot \sin(\zeta) + \cosh(\zeta) \cdot \cos(\zeta)) \\ &\quad + C_3 \cdot (\cosh(\zeta) \cdot \cos(\zeta) - \sinh(\zeta) \cdot \sin(\zeta)) \\ &\quad + C_4 \cdot (\cosh(\zeta) \cdot \sin(\zeta) + \sinh(\zeta) \cdot \cos(\zeta))] \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} u''(z) = \frac{d^2u}{dz^2} &= -2 \cdot \lambda^2 \cdot [C_1 \cdot \sinh(\zeta) \cdot \sin(\zeta) - C_2 \cdot \sinh(\zeta) \cdot \cos(\zeta) \\ &\quad + C_3 \cdot \cosh(\zeta) \cdot \sin(\zeta) - C_4 \cdot \cosh(\zeta) \cdot \cos(\zeta)] \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} u'''(z) = \frac{d^3u}{dz^3} &= -2 \cdot \lambda^3 \cdot [C_1 \cdot (\cosh(\zeta) \cdot \sin(\zeta) + \sinh(\zeta) \cdot \cos(\zeta)) \\ &\quad - C_2 \cdot (\cosh(\zeta) \cdot \cos(\zeta) - \sinh(\zeta) \cdot \sin(\zeta)) \\ &\quad + C_3 \cdot (\sinh(\zeta) \cdot \sin(\zeta) + \cosh(\zeta) \cdot \cos(\zeta)) \\ &\quad - C_4 \cdot (\sinh(\zeta) \cdot \cos(\zeta) - \cosh(\zeta) \cdot \sin(\zeta))] \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} u^{(4)}(z) = \frac{d^4u}{dz^4} &= -4 \cdot \lambda^4 \cdot [C_1 \cdot \cosh(\zeta) \cdot \cos(\zeta) + C_2 \cdot \cosh(\zeta) \cdot \sin(\zeta) \\ &\quad + C_3 \cdot \sinh(\zeta) \cdot \cos(\zeta) + C_4 \cdot \sinh(\zeta) \cdot \sin(\zeta)] \end{aligned} \quad (3.81)$$



$$\begin{aligned}
 u^{(5)}(z) = \frac{d^5 u}{dz^5} = & -4 \cdot \lambda^5 \cdot [C_1 \cdot (\sinh(\zeta) \cdot \cos(\zeta) - \cosh(\zeta) \cdot \sin(\zeta)) \\
 & + C_2 \cdot (\sinh(\zeta) \cdot \sin(\zeta) + \cosh(\zeta) \cdot \cos(\zeta)) \\
 & + C_3 \cdot (\cosh(\zeta) \cdot \cos(\zeta) - \sinh(\zeta) \cdot \sin(\zeta)) \\
 & + C_4 \cdot (\cosh(\zeta) \cdot \sin(\zeta) - \sinh(\zeta) \cdot \cos(\zeta))]
 \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned}
 u^{(6)}(z) = \frac{d^6 u}{dz^6} = & 8 \cdot \lambda^6 \cdot (C_1 \cdot \sinh(\zeta) \cdot \sin(\zeta) - C_2 \cdot \sinh(\zeta) \cdot \cos(\zeta) \\
 & + C_3 \cdot \cosh(\zeta) \cdot \sin(\zeta) - C_4 \cdot \cosh(\zeta) \cdot \cos(\zeta))
 \end{aligned} \quad (3.83)$$

Dieser viergliedrige Ansatz kann auch für die lange Zylinderschale verwendet werden, erfordert jedoch einen höheren Rechenaufwand als der zweigliedrige Ansatz aus Gleichung (3.60). Weiterhin kann es nach [HM01] bei der Berechnung der Schnittgrößen bei langen Schalen mit  $\zeta > 4$  zu größeren Abweichungen durch numerische Auslöschung (kleine Differenzen großer Zahlen) kommen.

Als Randbedingungen werden wieder die Randstörungen durch bezogene Radialkräfte  $R$  und bezogene Momente  $M$  für die Schnittkräfte angesetzt. Für den Lastfall  $R$  lauten die vier Randbedingungen:

$$m_z(0) = m_z(B) = 0 \quad (3.84)$$

$$q(0) = R \quad (3.85)$$

$$q(B) = 0 \quad (3.86)$$

Für diesen Lastfall ( $R$ ) hat das Gleichungssystem die Lösung:

$$\begin{aligned}
 C_1 = & \frac{R}{2 \cdot K \cdot \lambda^3} \cdot \frac{\cosh(\lambda \cdot B) \cdot \sinh(\lambda \cdot B) - \cos(\lambda \cdot B) \cdot \sin(\lambda \cdot B)}{\sinh^2(\lambda \cdot B) - \sin^2(\lambda \cdot B)} \\
 = & \frac{R}{2 \cdot K \cdot \lambda^3} \cdot H_1(\lambda \cdot B)
 \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$C_2 = -\frac{R}{2 \cdot K \cdot \lambda^3} \cdot \frac{\sin^2(\lambda \cdot B)}{\sinh^2(\lambda \cdot B) - \sin^2(\lambda \cdot B)} = -\frac{R}{2 \cdot K \cdot \lambda^3} \cdot H_7(\lambda \cdot B) \quad (3.88)$$

$$C_3 = -\frac{R}{2 \cdot K \cdot \lambda^3} \cdot \frac{\sinh^2(\lambda \cdot B)}{\sinh^2(\lambda \cdot B) - \sin^2(\lambda \cdot B)} = -\frac{R}{2 \cdot K \cdot \lambda^3} \cdot H_8(\lambda \cdot B) \quad (3.89)$$

$$C_4 = 0 \quad (3.90)$$

Für den Lastfall  $M$  lauten die vier Randbedingungen:

$$m_z(0) = M \quad (3.91)$$

$$m_z(B) = 0 \quad (3.92)$$

$$q(0) = q(B) = 0 \quad (3.93)$$

Für diesen Lastfall ( $M$ ) beträgt die Lösung des Gleichungssystems:

$$C_1 = \frac{M}{2 \cdot K \cdot \lambda^3} \cdot \frac{\sinh^2(\lambda \cdot B) + \sin^2(\lambda \cdot B)}{\sinh^2(\lambda \cdot B) - \sin^2(\lambda \cdot B)} = \frac{M}{2 \cdot K \cdot \lambda^2} \cdot H_3(\lambda \cdot B) \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} C_2 = C_3 &= -\frac{M}{2 \cdot K \cdot \lambda^3} \cdot \frac{\cosh(\lambda \cdot B) \cdot \sinh(\lambda \cdot B) + \cos(\lambda \cdot l) \cdot \sin(\lambda \cdot B)}{\sinh^2(\lambda \cdot l) - \sin^2(\lambda \cdot B)} \\ &= -\frac{M}{2 \cdot K \cdot \lambda^2} \cdot H_5(\lambda \cdot B) \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$C_4 = \frac{M}{2 \cdot K \cdot \lambda^2} \quad (3.96)$$

Infolge verschiedener Randstörungen ergeben sich die nach [HM01] in Tab. 3.3 dargestellten Randverformungen für die kurze Zylinderschale. Zur Vereinfachung sind die von  $\lambda \cdot z$  abhängigen Quotienten mit Hilfsfunktionen  $H_1$  bis  $H_8$  bezeichnet:

$$H_1(\lambda \cdot z) = \frac{\cosh(\lambda \cdot z) \cdot \sinh(\lambda \cdot z) - \cos(\lambda \cdot z) \cdot \sin(\lambda \cdot z)}{\sinh^2(\lambda \cdot z) - \sin^2(\lambda \cdot z)} \quad (3.97)$$

$$H_2(\lambda \cdot z) = \frac{\cosh(\lambda \cdot z) \cdot \sin(\lambda \cdot z) - \sinh(\lambda \cdot z) \cdot \cos(\lambda \cdot z)}{\sinh^2(\lambda \cdot z) - \sin^2(\lambda \cdot z)} \quad (3.98)$$

$$H_3(\lambda \cdot z) = \frac{\sinh^2(\lambda \cdot z) + \sin^2(\lambda \cdot z)}{\sinh^2(\lambda \cdot z) - \sin^2(\lambda \cdot z)} \quad (3.99)$$

$$H_4(\lambda \cdot z) = \frac{\sinh(\lambda \cdot z) \cdot \sin(\lambda \cdot z)}{\sinh^2(\lambda \cdot z) - \sin^2(\lambda \cdot z)} \quad (3.100)$$

$$H_5(\lambda \cdot z) = \frac{\cosh(\lambda \cdot z) \cdot \sinh(\lambda \cdot z) + \cos(\lambda \cdot z) \cdot \sin(\lambda \cdot z)}{\sinh^2(\lambda \cdot z) - \sin^2(\lambda \cdot z)} \quad (3.101)$$

$$H_6(\lambda \cdot z) = \frac{\cosh(\lambda \cdot z) \cdot \sin(\lambda \cdot z) + \sinh(\lambda \cdot z) \cdot \cos(\lambda \cdot z)}{\sinh^2(\lambda \cdot z) - \sin^2(\lambda \cdot z)} \quad (3.102)$$

$$H_7(\lambda \cdot z) = \frac{\sin^2(\lambda \cdot z)}{\sinh^2(\lambda \cdot z) - \sin^2(\lambda \cdot z)} \quad (3.103)$$

$$H_8(\lambda \cdot z) = \frac{\sinh^2(\lambda \cdot z)}{\sinh^2(\lambda \cdot z) - \sin^2(\lambda \cdot z)} \quad (3.104)$$

Für die Schnittgrößen gelten nach [HM01] die folgenden Gleichungen, wobei die Konstanten  $C_i$  für den betreffenden Lastfall einzusetzen sind:

$$n_x(\zeta) = 0 \quad (3.105)$$

$$n_\emptyset(\zeta) = \frac{E \cdot h}{a} \cdot [C_1 \cdot F_1(\zeta) + C_2 \cdot F_3(\zeta) + C_3 \cdot F_4(\zeta) + C_4 \cdot F_2(\zeta)] \quad (3.106)$$

$$m_z(\zeta) = -2 \cdot K \cdot \lambda^2 \cdot [C_1 \cdot F_2(\zeta) - C_2 \cdot F_4(\zeta) + C_3 \cdot F_3(\zeta) - C_4 \cdot F_1(\zeta)] \quad (3.107)$$

$$m_\emptyset(\zeta) = \nu \cdot m_x(\zeta) \quad (3.108)$$

$$q(\zeta) = -2 \cdot K \cdot \lambda^3 [(C_2 + C_3) \cdot F_2(\zeta) + (C_1 - C_4) \cdot F_4(\zeta) + (C_1 + C_4) \cdot F_3(\zeta) - (C_2 - C_3) \cdot F_1(\zeta)] \quad (3.109)$$

Die Funktionen  $F_1(\zeta)$  bis  $F_4(\zeta)$  sind hierbei folgendermaßen definiert:

$$F_1(\zeta) = \cosh(\zeta) \cdot \cos(\zeta) \quad (3.110)$$

$$F_2(\zeta) = \sinh(\zeta) \cdot \sin(\zeta) \quad (3.111)$$

$$F_3(\zeta) = \cosh(\zeta) \cdot \sin(\zeta) \quad (3.112)$$

$$F_4(\zeta) = \sinh(\zeta) \cdot \cos(\zeta) \quad (3.113)$$

Wird der untere Rand belastet, so ist die bezogene Länge  $\zeta$  durch  $\bar{\zeta}$  zu ersetzen und das Vorzeichen von  $q$  umzukehren. Es gilt:

$$\bar{\zeta} = \lambda \cdot \bar{z} \quad (3.114)$$

$$\bar{z} = B - z \quad (3.115)$$

### 3.5.5 Berechnung des Aufweitungsverlaufs

Die Aufweitung bzw. der Verlauf der Radialverschiebung über die Länge einer kurzen Zylinderschale kann durch die Überlagerung der sich ergebenden Verformungen aus dem Membranzustand und dem Biegezustand (hier für rechte und linke Randlasten getrennt) berechnet werden. Die Berechnung geschieht nach [HM01].

Tab. 3.3: Randverformungen kurzer rotationssymmetrischer Zylinderschalen ( $\lambda \cdot B < 4$ ) im Biegezustand (nach [HM01]) – Die Werte der Hilfsfunktionen  $H_1$  bis  $H_6$  gelten jeweils für die Länge des entsprechenden Einzelkörpers  $B$  (z.B.  $H_1 \hat{= H}_1(\lambda \cdot B)$ ).

$u_r$	$\frac{R}{2 \cdot K \cdot \lambda^3} \cdot H_1$	$\frac{M}{2 \cdot K \cdot \lambda^2} \cdot H_3$	$-\frac{R}{2 \cdot K \cdot \lambda^3} \cdot H_2$	$-\frac{M}{2 \cdot K \cdot \lambda^2} \cdot H_4$
$u_r'$	$-\frac{R}{2 \cdot K \cdot \lambda^2} \cdot H_3$	$-\frac{M}{2 \cdot K \cdot \lambda} \cdot H_5$	$\frac{R}{2 \cdot K \cdot \lambda^2} \cdot H_4$	$\frac{M}{2 \cdot K \cdot \lambda} \cdot H_6$
$u_l$	$-\frac{R}{2 \cdot K \cdot \lambda^3} \cdot H_2$	$-\frac{M}{2 \cdot K \cdot \lambda^2} \cdot H_4$	$\frac{R}{2 \cdot K \cdot \lambda^3} \cdot H_1$	$\frac{M}{2 \cdot K \cdot \lambda^2} \cdot H_3$
$u_l'$	$-\frac{R}{2 \cdot K \cdot \lambda^2} \cdot H_4$	$-\frac{M}{2 \cdot K \cdot \lambda} \cdot H_6$	$\frac{R}{2 \cdot K \cdot \lambda^2} \cdot H_3$	$\frac{M}{2 \cdot K \cdot \lambda} \cdot H_5$

Aus dem Membranspannungszustand (hervorgerufen durch den Innendruck  $p_i$ ) ergibt sich ein Verformungsanteil  $u_p$  von:

$$u_p = \frac{r_s^2 \cdot p_i}{E \cdot H} \quad (3.116)$$

Die rechten Randlasten  $R_r$  und  $M_r$  rufen den folgenden Verformungsanteil hervor:

$$\begin{aligned} u_r(z) = & \frac{1}{2 \cdot K \cdot \lambda^2} \cdot \left[ \left( -\frac{R_r \cdot H_1(\lambda \cdot B)}{\lambda} + M_r \cdot H_3(\lambda \cdot B) \right) \right. \\ & \cdot \cosh(\lambda \cdot z) \cdot \cos(\lambda \cdot z) - \left( -\frac{R_r \cdot H_7(\lambda \cdot B)}{\lambda} + M_r \cdot H_5(\lambda \cdot B) \right) \\ & \cdot \cosh(\lambda \cdot z) \cdot \sin(\lambda \cdot z) - \left( -\frac{R_r \cdot H_8(\lambda \cdot B)}{\lambda} + M_r \cdot H_5(\lambda \cdot B) \right) \\ & \left. \cdot \sinh(\lambda \cdot z) \cdot \cos(\lambda \cdot z) + M_r \cdot \sinh(\lambda \cdot z) \cdot \sin(\lambda \cdot z) \right] \end{aligned} \quad (3.117)$$

Ähnliches gilt für die linken Randlasten  $R_l$  und  $M_l$ , wobei die Koordinate  $z$  ebenfalls auf den Ursprung der rechten Randlasten (oder auch umgekehrt) bezogen werden sollte:

$$\begin{aligned} u_l(z) = & \frac{1}{2 \cdot K \cdot \lambda^2} \cdot \left[ \left( \frac{R_l \cdot H_1(\lambda \cdot B)}{\lambda} + M_l \cdot H_3(\lambda \cdot B) \right) \right. \\ & \cdot \cosh(\lambda \cdot (B - z)) \cdot \cos(\lambda \cdot (B - z)) + \\ & - \left( \frac{R_l \cdot H_7(\lambda \cdot B)}{\lambda} + M_l \cdot H_5(\lambda \cdot B) \right) \\ & \cdot \cosh(\lambda \cdot (B - z)) \cdot \sin(\lambda \cdot (B - z)) + \\ & - \left( \frac{R_l \cdot H_8(\lambda \cdot B)}{\lambda} + M_l \cdot H_5(\lambda \cdot B) \right) \\ & \cdot \sinh(\lambda \cdot (B - z)) \cdot \cos(\lambda \cdot (B - z)) + \\ & \left. + M_l \cdot \sinh(\lambda \cdot (B - z)) \cdot \sin(\lambda \cdot (B - z)) \right] \end{aligned} \quad (3.118)$$

Aus der Überlagerung dieser drei Verformungsanteile lässt sich der Verlauf der Radialverschiebung  $u$  über die Länge  $z$  der Zylinderschale berechnen. Es gilt:

$$u(z) = u_p + u_r(z) + u_l(z) \quad (3.119)$$

Ähnliche Überlegungen führen bei einer Kreisringscheibe unter Nutzung von Tafel

14 in HAKE zu folgenden Ergebnissen für die Verschiebung des rechten  $u_r$  und linken Rands  $u_l$ , wobei  $B$  die Breite (axiale Länge) der Kreisringscheibe ist. Alle weiteren Größen entsprechen den bei Schalen üblichen Definitionen. Die Randlasten sind jeweils in positiver Richtung nach Tafel 14 angesetzt.

$$u_r = \frac{r_s}{E \cdot H \cdot B} \cdot \left( -6 \cdot M_r \cdot \frac{r_r}{H} + 6 \cdot M_l \cdot \frac{r_l}{H} - 4 \cdot R_r \cdot r_r - 2 \cdot R_l \cdot r_l \right) \quad (3.120)$$

$$u_l = \frac{r_s}{E \cdot H \cdot B} \cdot \left( 6 \cdot M_l \cdot \frac{r_l}{H} - 6 \cdot M_r \cdot \frac{r_r}{H} + 4 \cdot R_l \cdot r_l + 2 \cdot R_r \cdot r_r \right) \quad (3.121)$$

Die Radien  $r_r$  und  $r_l$  entsprechen den Kraftangriffsradien der rechten und linken Randlasten und Momente.

### 3.5.6 Dicke Schalen

Die bisher zusammengetragenen Formeln gelten streng genommen nur für „dünne“ Schalen, die Gleichung (3.41) erfüllen. Die Beschränkung auf dünne Schalen ist jedoch für die zu untersuchende Thematik des stirnseitig befestigten Freilaufs nicht ausreichend. Betrachtet man z.B. die verschiedenen Freilaufbaugrößen der beiden Freilaufhersteller RINGSPANN GMBH [Rin] und STIEBER GMBH [Sti], welche für eine stirnseitige Befestigung vorgesehen sind, und trägt die Wandstärkenverhältnisse der Freilaufaußenringe über der Bauraumkenngröße<sup>4</sup> nach [NW04] auf, so ergibt sich Abb. 3.8. Es ist zu erkennen, dass gerade diese Freiläufe den bisherigen Gültigkeitsbereich der „Theorie dünner Schalen“ mit  $\frac{H}{r_s} > 0,2$  verlassen und somit „dicke Schalen“ darstellen. Die Annahme über die Wandstärke konstanter Spannungen wäre demnach nicht mehr gültig und es könnten die Radialspannungen nicht mehr einfach vernachlässigt werden.

ROSEMEIER hat in [Ros73] jedoch gezeigt, dass eine Berechnung dicker Schalen mit den bisherigen Methoden weiterhin möglich ist und plausible Ergebnisse liefert. An die Stelle der Membrantheorie aus Unterabschnitt 3.5.2 tritt als partikuläre Lösung die Kesselformel für dickwandige Behälter. Für diese gilt z.B. nach CHAKRABARTY [Cha06] für einen dickwandigen Behälter unter dem Innendruck  $p_i$

$$u(r) = \frac{p_i}{E} \cdot \frac{d^2}{D^2 - d^2} \cdot \left[ \alpha + (1 + \nu) \cdot \frac{D^2}{4 \cdot r^2} \right] \cdot r \quad (3.122)$$

<sup>4</sup>Nach [NW04] ist die Bauraumkenngröße als Produkt der Bauhöhe (halbe Differenz zwischen Außendurchmesser  $D_{AR}$  und Innendurchmesser  $d_i$  des Freilaufs), der Freilaufbreite  $B$  und dem Innendurchmesser  $d_i$  (entspricht dem Wellendurchmesser) definiert.

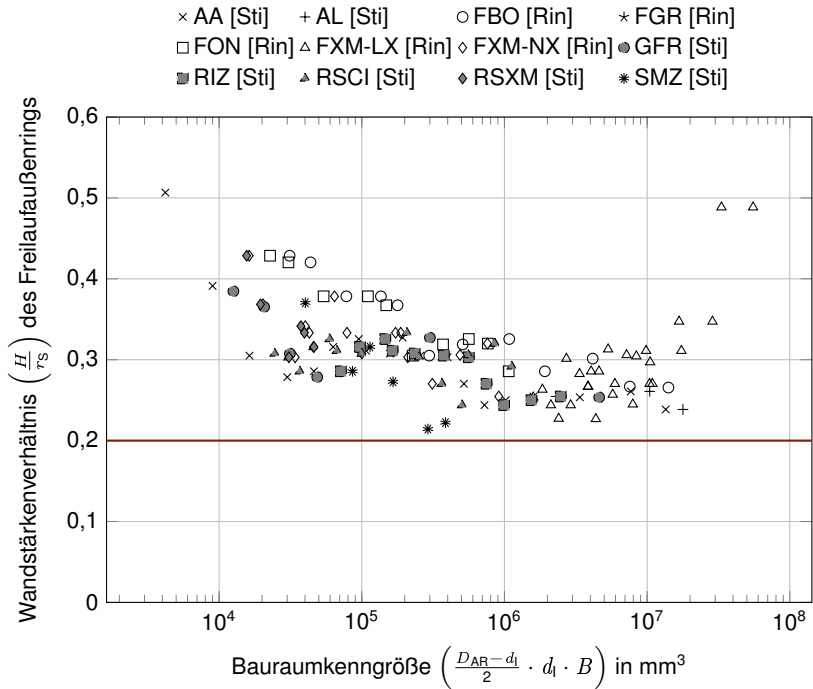


Abb. 3.8: Verhältnis der Wanddicke  $H$  zum mittleren Radius  $r_s$  verschiedener zur stirnseitigen Befestigung vorgesehener Radialfreiläufe der STIEBER GMBH [Sti] und RINGSPANN GMBH [Rin], aufgetragen über der Bauraumkenngröße

Der Faktor  $\alpha$  ist hierbei von der Gestaltung der Behälterenden abhängig:

- Für einen Behälter mit offenen Enden gilt  $\alpha = (1 - \nu)$ . Dies entspricht einem ebenem Spannungszustand (ESZ).
- Bei beidseitig fest eingespannten Enden ergibt sich ein ebener Dehnungszustand (EVZ) in der Behälterwand und dementsprechend gilt in diesem Fall  $\alpha = (1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)$ .
- Werden die Behälterwände beidseitig geschlossen, ergibt sich eine vom Innendruck abhängige Axialspannung längs des Behälters. Dementsprechend gilt für diesen Fall  $\alpha = (1 - 2 \cdot \nu)$ .

In [Ros73] wurde hierbei die Formel für den ebenen Spannungszustand verwendet (ESZ).

Als homogene Lösung bleibt auch bei dicken Schalen ( $\frac{H}{r_S} > 0,2$ ) die Biegetheorie der dünnen Schalen (siehe Unterabschnitte 3.5.3 und 3.5.4) gültig.

Durch den größer werdenden Einfluss der vernachlässigten Querkraftverformungen und die Vernachlässigung der eigentlich über die Wandstärke vorliegenden nichtlinearen Spannungsverteilung ist jedoch mit einem größeren Fehler zu rechnen. Für ein Verhältnis von Wanddicke zu mittlerem Radius von 0,5 gibt ROSEMEIER hier einen maximalen Fehler für die berechnete Aufweitung von 4 % an.



## 4 Analytisches Modell

Zur Beschreibung der kraftschlüssigen Übertragung am stirnseitig befestigten Freilauf wurde ein analytisches Modell aufgestellt, welches in diesem Kapitel genauer erläutert wird.

### 4.1 Reibkegel der stirnseitigen Verbindung

Auf den Freilaufaußenring (kurz: AR) wirken in radialer und tangentialer Richtung die in Abb. 1.5 dargestellten Kräfte, wobei hieraus im stirnseitigen Kontakt die Umfangskräfte  $F_T$  der stirnseitigen Mehrschraubenverbindung wirken. Diese Kräfte werden durch den Kraftschluss zwischen Freilaufaußenring und Flansch (kurz: FL) übertragen. Der Kraftschluss wird hierbei durch die Schraubenvorspannung  $F_{SV}$  und den wirksamen Reibwert  $\mu$  in der stirnseitigen Verbindung ermöglicht. Für eine bessere Anschaulichkeit der Kraftverhältnisse im stirnseitigen Kontakt wird im Folgenden auf die Vorstellung des Reibkegels zurückgegriffen. Infolge der behinderten radialen Aufweitung entsteht eine zusätzliche radiale Kraftkomponente  $\Delta F_R$  in der Reibfuge der stirnseitigen Befestigung.

Dargestellt im Reibkegel ergibt sich der in Abb. 4.1 gezeigte Zusammenhang. Der Reibkegel öffnet sich mit dem Winkel  $\rho$  dessen Tangens den Reibwert  $\mu$  darstellt. Die Begrenzung des oberen Kreistrings stellt die maximal kraftschlüssig übertragbare Kraft innerhalb der Reibfuge der stirnseitigen Verschraubung dar, welche mit der Gesamtvorspannkraft  $F_{SV,ges}$  vorgespannt ist.

Eigentliches Ziel der stirnseitigen Befestigung ist die Übertragung des Drehmoments  $M_T$  des Freilaufs (Sperrmoment) durch die Umfangskräfte der Verschraubung  $F_{T,theor}$  bzw.  $F_T$  (im Folgenden werden immer die Kräfte als Summe für die Gesamtverbindung betrachtet). Mit  $F_{T,theor}$  sind die maximal übertragbaren Umfangskräfte unter der Annahme bezeichnet, dass allein diese in der Reibfuge wirken. Es

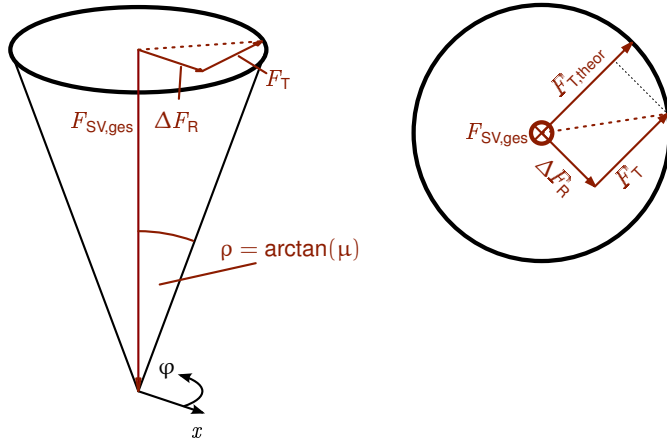


Abb. 4.1: Reibkegel für die stirnseitige Verschraubung (Gesamtverbindung)

sind somit in diesem Fall größere Drehmomente übertragbar, als wenn eine zusätzliche Kraft  $\Delta F_R$  in radialer Richtung (also orthogonal zu den Umfangskräften) wirkt.

Aus der Vorstellung des Reibkegels für die Gesamtverbindung mit  $z_S$  mit  $F_{SV}$  vorgespannten Schrauben am Lochkreis  $r_T$  ergibt sich folglich:

$$F_{T,theor}^2 = (\mu \cdot z_S \cdot F_{SV})^2 = F_T^2 + \Delta F_R^2 \quad (4.1)$$

## 4.2 Kräfte an der stirnseitigen Verbindung

Dem analytischen Modell liegt der in Abb. 4.2 dargestellte Aufbau zugrunde. Die Anzahl und Lage der Klemmstellen und der Verschraubungsstellen ist hierbei nur beispielhaft gleich. Diese können für die Anwendung des analytischen Modells jeweils beliebig sein, da die Einzelkräfte jeweils zu Gesamtkräften für die stirnseitige Verbindung zusammengefasst werden.

Der Freilaufaußenring wird im Sperrbetrieb an den  $z_K$  Klemmstellen am Innendurchmesser  $d_{AR}$  durch ein Drehmoment  $M_T$  belastet. Diese Belastung mit einem Drehmoment wird durch die Klemmkkräfte in Umfangsrichtung  $F_{UK}$  hervorgerufen und bedeutet gleichzeitig über den Klemmwinkel  $\alpha_K$  eine Belastung mit den radial

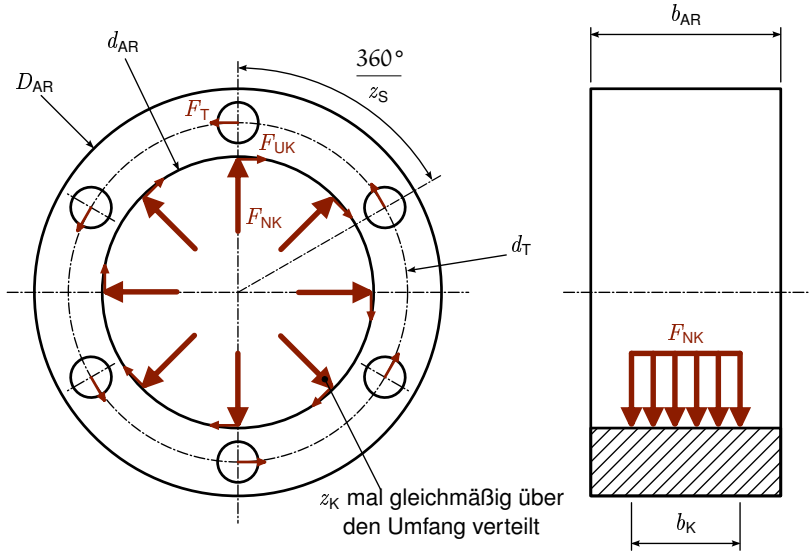


Abb. 4.2: Freilaufaußenring mit Klemm- und Verschraubungskräften (Kräfte in axialer Richtung und Kontaktkräfte sind nicht dargestellt)

aufweitenden Klemmnormalkräften  $F_{NK}$ . Hierbei findet die Belastung näherungsweise durch Linienlasten an den Kontaktpunkten zwischen Klemmelementen und Freilaufaußenring statt.

Die durch das zu übertragende Drehmoment  $M_T$  am Lochkreis  $r_T$  bzw.  $d_T$  der stirnseitigen Verschraubung hervorgerufenen Kräfte  $F_T$  stehen im Gleichgewicht mit den Klemmkraften in Umfangsrichtung  $F_{UK}$  an den Klemmstellen. Der eigentliche Drehmomentaufbau findet hierbei an den Klemmstellen, also am Innendurchmesser  $d_{AR}$  des Freilaufaußenrings, statt und somit ergibt sich aus dem Gleichgewicht der Drehmomente am Freilaufaußenring der folgende Zusammenhang:

$$F_{UK} = \frac{2 \cdot M_T}{d_{AR}} = F_T \cdot \frac{d_T}{d_{AR}} = F_T \cdot C_D \quad (4.2)$$

Hierbei gibt der Faktor  $C_D$  das Verhältnis der Kraftangriffsorte zwischen Klemm- und Verschraubungsstellen am Freilaufaußenring wieder und wird deshalb als „Lochkreisverhältnis“ bezeichnet. Es gilt:

$$C_D = \frac{d_T}{d_{AR}} \quad (4.3)$$

Zwischen der Normalkraft  $F_{\text{NK}}$  und der Umfangskraft  $F_{\text{UK}}$  an der Klemmstelle gilt über den Klemmwinkel  $\alpha_K$  der bekannte Zusammenhang aus Gleichung (1.1) und daraus folgt eine direkte Abhängigkeit der Umfangskräfte und des Drehmoments von den Klemmnormalkräften (und natürlich auch umgekehrt):

$$F_{\text{NK}} = \frac{F_{\text{UK}}}{\tan(\alpha_K)} = \frac{F_T}{\tan(\alpha_K)} \cdot \frac{d_T}{d_{\text{AR}}} = \frac{M_T}{r_T \cdot \tan(\alpha_K)} \cdot C_D \quad (4.4)$$

### 4.3 Relative Übertragbarkeit

Durch die freilaufspezifisch hohen Klemmnormalkräfte wird der Freilaufaußenring in radialer Richtung aufgeweitet. Wie bereits eingangs erwähnt, ergibt sich aus der Behinderung der freien Aufweitung im stirnseitigen Kontakt durch den angekoppelten Flansch eine zusätzliche radiale Kraftkomponente  $\Delta F_R$  in der Reibfuge der stirnseitigen Befestigung. Durch diese Zusatzkraft wird die maximal kraftschlüssig übertragbare Umfangskraft  $F_T$  begrenzt und es gilt folglich für das übertragbare Drehmoment unter Berücksichtigung der behinderten radialen Aufweitung:

$$M_{T,\text{theor}} = F_T \cdot \frac{d_T}{2} \quad (4.5)$$

Dem gegenüber steht das maximal übertragbare Drehmoment  $M_{T,\text{theor}}$  unter der Annahme, dass nur Kräfte in Umfangsrichtung auf die stirnseitige Verbindung wirken. Für dieses gilt:

$$M_{T,\text{theor}} = F_{T,\text{theor}} \cdot \frac{d_T}{2} = \mu \cdot F_{\text{SV,ges}} \cdot \frac{d_T}{2} \quad (4.6)$$

Gegenüber der theoretischen Übertragbarkeit reduziert sich die Übertragbarkeit unter Berücksichtigung der radialen Zusatzkraft in der Reibfuge. Die Reduktion der kraftschlüssigen Übertragbarkeit infolge der behinderten radialen Aufweitung bzw. besser der verbleibende Anteil kann über das Verhältnis von übertragbarem Drehmoment  $M_T$  unter Berücksichtigung der freilaufspezifischen Lasten (radiale Aufweitung durch hohe Klemmnormalkräfte) zu übertragbarem Drehmoment unter der (theoretischen) Annahme einer reinen Torsionsbelastung  $M_{T,\text{theor}}$  ausgedrückt werden. Dieses Verhältnis wird als „relative Übertragbarkeit“  $\beta_R$  bezeichnet:

$$\beta_R = \frac{M_T}{M_{T,\text{theor}}} = \frac{F_T}{F_{T,\text{theor}}} \quad (4.7)$$

Aus der Vorstellung des Reibkegels für die Gesamtverbindung des stirnseitig befestigten Freilaufs in Abschnitt 4.1 folgt für die theoretisch übertragbare Umfangskraft  $F_{T,theor}$  und die, unter Berücksichtigung der radialen Zusatzkraft  $\Delta F_R$ , übertragbare Umfangskraft  $F_T$  der Zusammenhang:

$$F_{T,theor}^2 = F_T^2 + \Delta F_R^2 \quad (4.8)$$

Wird jeweils durch das Quadrat der Umfangskraft  $F_T$  geteilt und über allem die Wurzel gezogen, so ergibt sich:

$$\frac{F_{T,theor}}{F_T} = \sqrt{1 + \left[ \frac{\Delta F_R}{F_T} \right]^2} \quad (4.9)$$

Die Umfangskraft  $F_T$  kann auch nach Gleichung (4.4) über die Klemmnormalkraft  $F_{NK}$ , den Klemmwinkel  $\alpha_K$  und das Lochkreisverhältnis  $C_D$  ausgedrückt werden:

$$F_T = \frac{F_{NK} \cdot \tan(\alpha_K)}{C_D} \quad (4.10)$$

Wird der Zusammenhang aus Gleichung (4.9) in Gleichung (4.8) eingesetzt und der Kehrwert gebildet, so ergibt sich für die relative Übertragbarkeit  $\beta_R$  der folgende Zusammenhang:

$$\beta_R = \sqrt{\frac{1}{1 + \left[ \frac{1}{\tan(\alpha_K)} \cdot C_D \cdot \frac{\Delta F_R}{F_{NK}} \right]^2}} \quad (4.11)$$

Die relative Übertragbarkeit  $\beta_R$  hängt also vom Lochkreisverhältnis  $C_D$ , dem Klemmwinkel  $\alpha_K$  und der infolge der Klemmnormalkraft  $F_{NK}$  in der Reibfuge entstehenden Zusatzkraft  $\Delta F_R$ , ausgedrückt über das Kräfteverhältnis  $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$ , ab.

Aus den Verhältnissen am Reibkegel ergibt sich somit für das maximal übertragbare Drehmoment unter Berücksichtigung der behinderten radialen Aufweitung:

$$M_T = \mu \cdot \frac{d_T}{2} \cdot F_{SV,ges} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \left[ \frac{1}{\tan(\alpha_K)} \cdot C_D \cdot \frac{\Delta F_R}{F_{NK}} \right]^2}} \quad (4.12)$$

Das theoretisch – ohne Berücksichtigung der durch die behinderte radiale Aufweitung entstehenden Zusatzkräfte – übertragbare Drehmoment (vergleiche Gleichung (4.6)) findet sich auch in der Gleichung (4.12) für das maximal übertragbare Drehmoment unter Berücksichtigung der radialen Zusatzkräfte  $\Delta F_R$  wieder.

Das Kräfteverhältnis  $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$  drückt hierbei anschaulich aus wie viel Wirkung – radiale Zusatzkraft  $\Delta F_R$  – infolge der Ursache – also der radial aufweitenden Klemmnormalkraft  $F_{NK}$ , welche im Klemmbereich  $b_K$  wirkt – in der Reibfuge entsteht. Hierbei kann nicht mehr Wirkung als Ursache entstehen. Das bedeutet wiederum, dass für das Kräfteverhältnis gilt

$$0 \leq \frac{\Delta F_R}{F_{NK}} \leq 1 \quad . \quad (4.13)$$

Das Kräfteverhältnis ist – wie später noch gezeigt wird – abhängig von den Steigungsverhältnissen bzw. allgemein den geometrischen Verhältnissen zwischen den stirnseitig miteinander verbundenen Körpern des Freilaufaußenrings und des Anschlussflanschs. Gleichzeitig folgt aus Gleichung (4.13), dass auch bei sehr schlechten Verhältnissen ( $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} \rightarrow 1$ ) immer noch eine – wenn auch minimale – relative Übertragbarkeit  $\beta_{R,min}$  verbleibt. Für diese gilt:

$$\begin{aligned} \beta_{R,min} &= \lim_{\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} \rightarrow 1} (\beta_R) = \sqrt{\frac{1}{1 + \left[ \frac{1}{\tan(\alpha_K)} \cdot C_D \right]^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 + \left[ \frac{1}{\tan(\alpha_K)} \cdot \frac{d_T}{d_{AR}} \right]^2}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Für den Wertebereich der relativen Übertragbarkeit gilt folglich

$$\sqrt{\frac{1}{1 + \left[ \frac{1}{\tan(\alpha_K)} \cdot C_D \right]^2}} \leq \frac{\Delta F_R}{F_{NK}} \leq 1 \quad . \quad (4.15)$$

Neben den geometrischen Verhältnissen zwischen den Kontaktkörpern „Freilaufaußenring“ und „Flansch“ hängt die relative Übertragbarkeit auch noch von Parametern ab, die rein auf die Konstruktion des Freilaufaußenrings zurückzuführen sind. Dies sind das Lochkreisverhältnis  $C_D$  und der über die konstruktive Gestaltung des Klemmspalts oder der Klemmkörper festgelegte und weiterhin drehmomentabhängige Klemmwinkel  $\alpha_K$ . Für einen angenommenen Klemmwinkel von  $4^\circ$  und ein Lochkreisverhältnis von 1,2 ergibt sich z.B. der in Abb. 4.3 dargestellte Verlauf für die relative Übertragbarkeit  $\beta_R$  über dem Kräfteverhältnis  $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$ .

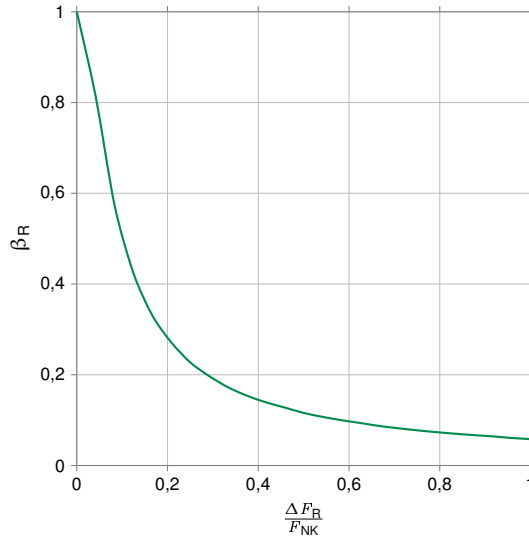


Abb. 4.3: Relative Übertragbarkeit  $\beta_R$  für  $C_D = 1,2$  und  $\alpha_K = 4^\circ$

#### 4.3.1 Einfluss des Klemmwinkels

Den Einfluss des Klemmwinkels  $\alpha_K$  auf die relative Übertragbarkeit veranschaulicht Abb. 4.4. Je größer der Klemmwinkel bei maximalem zu übertragendem Drehmoment, desto höher ist die relative Übertragbarkeit. Diese positive Beeinflussung der kraftschlüssigen Übertragbarkeit des stirnseitig befestigten Freilaufs ist in Abb. 4.4 durch einen Pfeil nochmals bildlich dargestellt. Wie bereits in Abschnitt 1.1 erläutert, ist eine Steigerung des Klemmwinkels deutlich über  $6^\circ$  hinaus unter Verweis auf das erweiterte Funktionskriterium für kraftschlüssige Freiläufe in Gleichung (1.4) und die zu erwartenden Reibwerte im Klemmkontakt nicht weiter sinnvoll möglich.

Typischerweise ist der Klemmwinkel in einem Freilauf nicht konstant, sondern die Klemmgeometrie ist so ausgelegt, dass der Klemmwinkel mit zunehmendem Drehmoment steigt. Dieser Umstand wirkt sich demnach positiv auf die relative Übertragbarkeit aus.

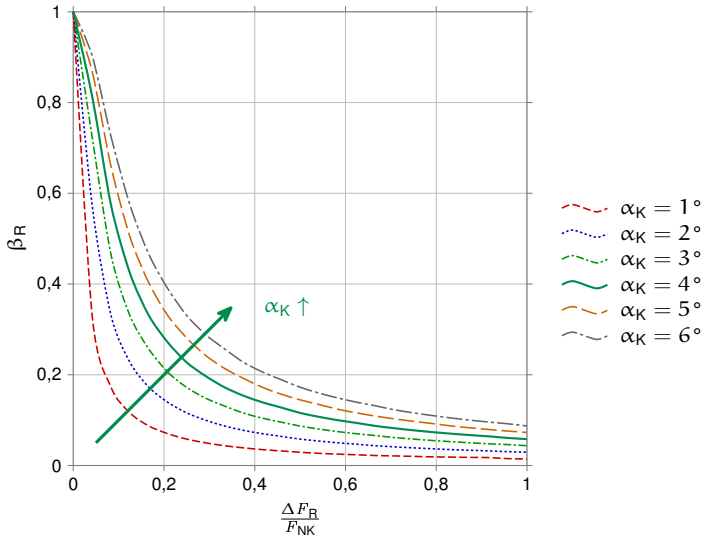


Abb. 4.4: Relative Übertragbarkeit  $\beta_R$  unter Variation von  $\alpha_K$  für  $C_D = 1,2$

### 4.3.2 Einfluss des Lochkreises

In Abb. 4.5 ist der Einfluss des Lochkreisverhältnisses  $C_D$  auf die relative Übertragbarkeit  $\beta_R$  dargestellt. Hierbei ist wiederum die gewünschte positive Beeinflussung durch einen Pfeil bildlich dargestellt. Je kleiner das Lochkreisverhältnis ist, also je näher der Lochkreisdurchmesser  $d_T$  am Innendurchmesser des Freilaufaußenrings  $d_{AR}$  liegt, desto höher ist die relative Übertragbarkeit.

Die Wahl des Lochkreisverhältnisses ist durch den Innen- und Außendurchmesser des Freilaufaußenrings begrenzt. So kann minimal ein Lochkreisdurchmesser  $d_{T,min}$  für Schrauben mit dem Kopfdurchmesser  $d_K$  gewählt werden, für welchen gilt:

$$d_{T,min} > d_{AR} + \frac{d_K}{2} \quad (4.16)$$

Der maximale Lochkreisdurchmesser  $d_{T,max}$  ist wiederum durch den Außendurchmesser  $D_{AR}$  des Freilaufaußenrings begrenzt. Es gilt:

$$d_{T,max} < D_{AR} - \frac{d_K}{2} \quad (4.17)$$

In Abb. 4.6 sind zwei verschiedene Lochkreise  $d_{T,1}$  und  $d_{T,2}$  bzw. Lochkreisverhält-



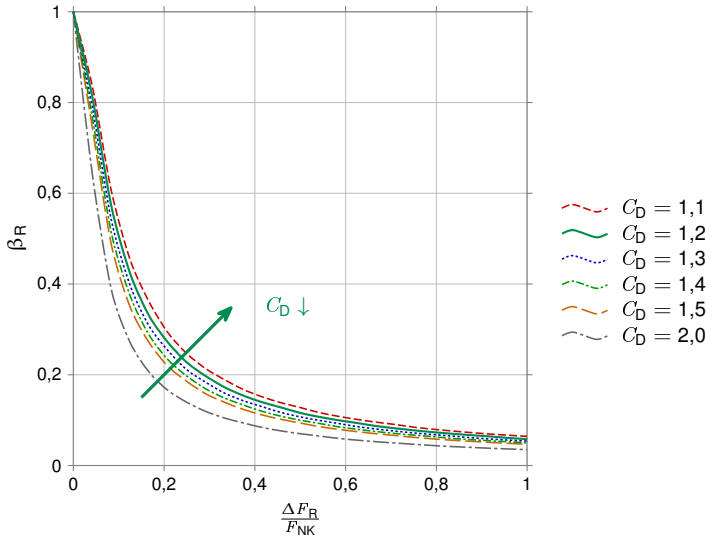


Abb. 4.5: Relative Übertragbarkeit  $\beta_R$  unter Variation von  $C_D$  für  $\alpha_K = 4^\circ$

nisse dargestellt, wobei der Freilauf mit dem links abgebildeten Lochkreis  $d_{T,1}$  und sonst gleichen Abmessungen eine höhere relative Übertragbarkeit besitzt.

Aus dem Vergleich der Abb. 4.4 und 4.5 wird ersichtlich, dass der Klemmwinkel  $\alpha_K$  einen stärkeren Einfluss auf die Grenzkurve der relativen Übertragbarkeit hat als das Lochkreisverhältnis  $C_D$ . Haupteinflussgröße der relativen Übertragbarkeit  $\beta_R$  ist jedoch das Kräfteverhältnis  $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$ . Dies führt zu der Frage, wie das Kräfteverhältnis aus den geometrischen Verhältnissen am stirnseitig befestigten Freilauf abgeschätzt werden kann.

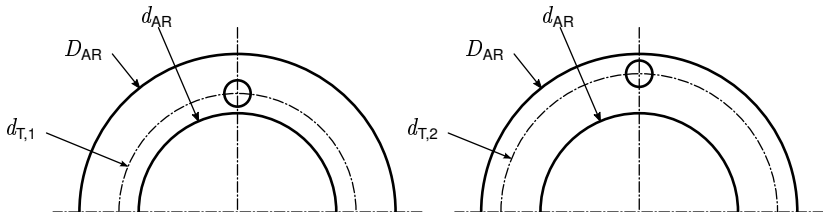


Abb. 4.6: Lochkreisverhältnis  $C_D$  am Freilaufaußenring (links: kleines  $C_D$  - rechts: großes  $C_D$ )



## 5 Methoden zur Abschätzung der radialen Zusatzkräfte

Durch den stirnseitig verbundenen Flansch wird der Freilaufaußenring in seiner freien radialen Aufweitung behindert. Wie bei jeder behinderten Ausdehnung kommt es zu Zwangs- bzw. Verspannkräften. Im Fall des stirnseitig befestigten Freilaufs kommt es zu einer zusätzlichen radialen Randlast  $\Delta F_R$  im Kontakt zwischen Freilaufaußenring und Flansch, welche ihrer Ursache, der aufweitenden Klemmnormalkraft  $F_{NK}$ , entgegen gerichtet ist.

Das Kräfteverhältnis  $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$  kann über verschiedene Wege abgeschätzt werden. So kann ein Starrkörpermodell, erweitert um einfache Federbetrachtungen, elastomechanische Rechenverfahren und die Finite-Elemente-Methode (FEM), genutzt werden. Die in dieser Arbeit untersuchten möglichen Abschätzverfahren sind in Abb. 5.1 dargestellt. Hierbei wird die Nutzung eines 2D-FE-Modells als Referenzmethode angesehen, da sie einen guten Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenaufwand darstellt. Die der Referenzmethode zugrunde liegenden Vereinfachungen und inwieweit diese zulässig sind werden nachfolgend noch gezeigt. Vorab sei jedoch angemerkt, dass für die Nutzung der FEM komplexe und in der Regel pro-

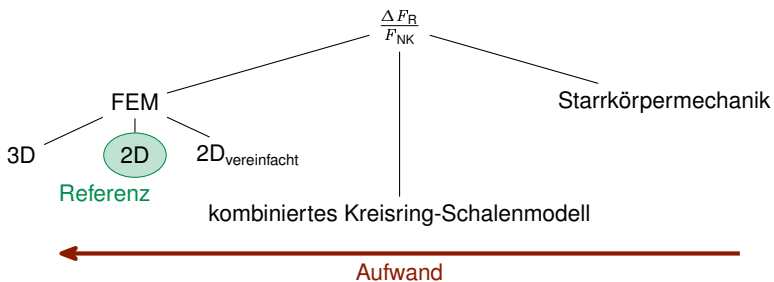


Abb. 5.1: Methoden zur Abschätzung des Kräfteverhältnisses  $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$

prietäre Software<sup>1</sup> benötigt wird. Dies widerspricht dem Ziel dieser Arbeit, den Anwendern einfach handhabbare Möglichkeiten, auf möglichst analytischer Basis, zur Abschätzung der relativen Übertragbarkeit  $\beta_R$  zur Verfügung zu stellen.

## 5.1 FE-Modelle

Die Grundlage der Methode der Finiten Elemente (kurz: FEM) ist ebenfalls das Prinzip der virtuellen Arbeit, wie es in Abschnitt 3.3 kurz beschrieben wurde. Bei der FEM wird der Körper in einfach beschreibbare Teilgebiete, die sogenannten „Elemente“ zerlegt und werden Ansatzfunktionen für die unbekannten Elementverschiebung auf Elementebene definiert. Durch die relativ einfach beschreibbaren Elemente ist die Berechnung komplexer Geometrien möglich, welche z.B. analytisch nicht mehr berechenbar wären. Über den bekannten Bezug der einzelnen Elemente bzw. ihrer Knotenpunkte zueinander kann ein lineares Gleichungssystem für den Gesamtkörper aufgestellt werden, welches über entsprechende Verfahren numerisch gelöst werden kann. Durch die elementweise Beschreibung des Gesamtproblems ist es jedoch nicht mehr möglich, analytische Zusammenhänge für das Gesamtproblem abzuleiten, was die Veranschaulichung der Zusammenhänge zwischen Last- und Verformungsgrößen erheblich erschwert.

Allen im Zuge dieser Arbeit durchgeführten FE-Simulationen und Berechnungen lag die Annahme eines linear-elastischen Materialverhaltens zugrunde, wobei eine Querkontraktionszahl von  $\nu = 0,3$  und ein Elastizitätsmodul von  $E = 200.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  angenommen wurden, wie sie wohl auf die meisten Stahlwerkstoffe zutreffen.

Weiterhin wurden alle FE-Simulationen mit einer auf 1 kN normierten (Gesamt-) Klemmnormalkraft  $F_{\text{NK}}$  durchgeführt, da das Ziel der Simulationen nicht die Untersuchung der maximal kraftschlüssig im stirnseitigen Kontakt übertragbaren Kräfte war, sondern die Abschätzung des Kräfteverhältnisses  $\frac{\Delta F_R}{F_{\text{NK}}}$ , welches bei elastischem Materialverhalten nicht von den angreifenden Klemmnormalkräften abhängig ist.

---

<sup>1</sup> Als FE-System wurde in dieser Arbeit *ANSYS Workbench* in der Version 17.1 verwendet.

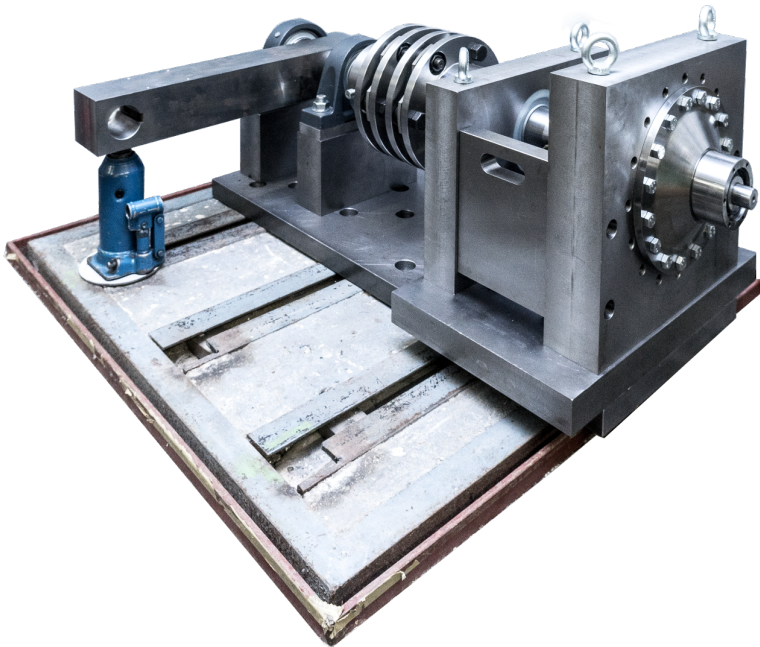


Abb. 5.2: Prüfstand für stirnseitig befestigte Freiläufe

### 5.1.1 3D-FE-Vollmodell

Als 3D-FE-Vollmodell sind hier Modelle bezeichnet, die – so gut wie – alle geometrischen Elemente der Originalteile beinhalten. Das bedeutet im Fall dieser Arbeit, dass der Freilaufaußenring mit evtl. vorhandenen Fasen, Rundungen und Nuten sowie der stirnseitigen Verschraubung als 3D-Volumenkörper modelliert ist. Weiterhin ist auch der Anschlussflansch ebenfalls mit Verschraubung und eventuellen Fasen, Rundungen und Nuten als stirnseitig verbundener 3D-Volumenkörper modelliert. Auch weitere verbundene Körper aus der Umgebungskonstruktion können hierbei mit modelliert und dementsprechend berücksichtigt werden.

Bereits beim Aufbau eines 3D-FE-Vollmodells sind diverse Vereinfachungen möglich. Welchen Einfluss diese auf die Abschätzung des Kräfteverhältnisses  $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$  ha-

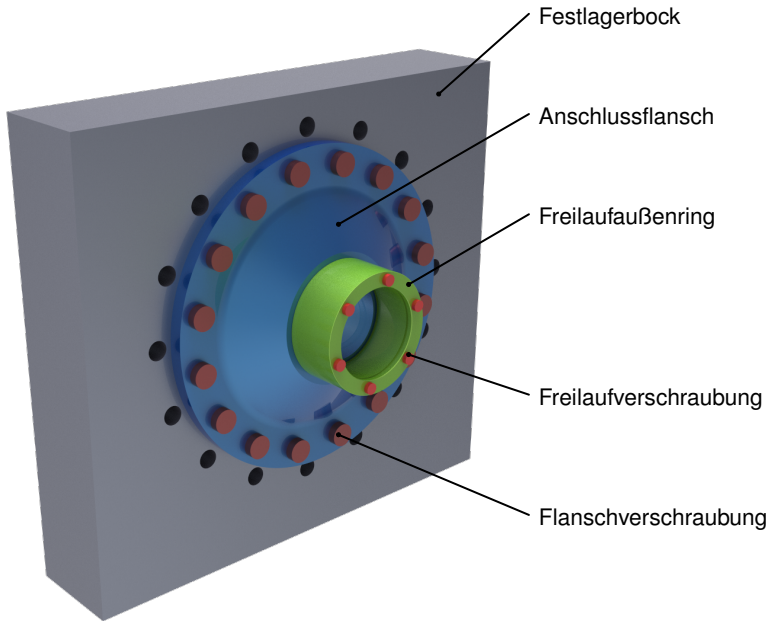


Abb. 5.3: betrachtete Körper für 3D-FE-Vollmodell am Beispiel des Freilaufs *Modell 1* in Versuchskonfiguration

ben und inwiefern diese demnach zulässig sind, soll im Folgenden am Beispiel des in Abb. 5.2 gezeigten Prüfstands für stirnseitig befestigte Freiläufe demonstriert werden.

Auf der rechten Seite in Abb. 5.2 ist ein stirnseitig befestigter Freilauf<sup>2</sup> zu erkennen, welcher über ein Anschlussflanschblatt mit dem Festlagerbock des Prüfstands verschraubt ist. Bereits dieser Lagerbock kann als sehr steif angenommen werden, so dass eine Betrachtung weiterer Körper in der FE-Simulation nicht sinnvoll erscheint. Weiterhin kann der gesamte Innenteil des Freilaufs mit Klemmelementen, Innenring und Welle auf die Kräfte im Klemmkontakt entsprechend z.B. Abb. 1.5 reduziert werden.

Das zu betrachtende System kann also in einem ersten Schritt bereits auf die in Abb. 5.3 dargestellten Körper reduziert werden.

<sup>2</sup>Hier der Freilauf *Modell 1* (siehe Kap. 6) in Versuchskonfiguration.

Für das 3D-FE-Vollmodell ergeben sich folglich die folgenden Kontakte bzw. Kontaktgruppen:

- Der eigentliche **Hauptkontakt** ist der zwischen dem **Freilauflaußenring** und dem **Anschlussflansch**.
- Als **Nebenkontakt** kann in diesem Fall der Kontakt zwischen **Anschlussflansch** und weiterer **Umgebungsstruktur** (in diesem Fall ist das der Festlagerbock des Prüfstands) bezeichnet werden.
- Die **erste Kontaktgruppe** sind die Kontakte zwischen den Schrauben der **Freilaufverschraubung** und dem **Freilauflaußenring**.
- Die **zweite Kontaktgruppe** sind die Kontakte zwischen den Schrauben der **Flanschverschraubung** und dem **Anschlussflansch**.

Der Realität am nächsten käme eine Modellierung der Kontakte zwischen allen Körpern als Reibkontakte. Die Berechnung von Reibkontakten in FE-Systemen stellt jedoch ein nichtlineares Problem dar, welches zwar lösbar ist, jedoch sehr viele Einstellparameter besitzt und zu Stabilitätsproblemen neigt. Die Lösung von Kontaktproblemen ist selbst für erfahrene FEM-Nutzer eine Herausforderung und steht dem Ziel einer einfachen Anwendung der Verfahren zur Abschätzung der radialen Zusatzkräfte somit entgegen. Bei den im Zuge dieser Arbeit durchgeführten Simulationen mit stirnseitigen Reibkontakten zeigte sich, dass starke Abweichungen zwischen den berechneten radialen Kontaktkräften je nach Einstellung der Solver-, Netz- und Kontaktparameter möglich sind.

Ziel der Simulationen ist es, die radialen Zusatzkräfte im Kontakt zu bestimmen, welche vor einem eventuellem Rutschen des Kontakts wirken. Demnach sind bei der Modellierung von Reibkontakten die Kraftverhältnisse so zu wählen, dass ein Rutschen im Kontakt nicht stattfindet. Um diese Vorgabe zu erfüllen, gleichzeitig den Rechenaufwand zu reduzieren und den Aufwand zur Modellerstellung zu minimieren, wird empfohlen, für die Bestimmung der radialen Zusatzkräfte direkt mit sogenannten Verbundkontakten zu rechnen. Ein Verbundkontakt bedeutet, dass die miteinander verbundenen Teile sich wie ein Teil, welches sich über die Kontaktstelle erstreckt, verhalten. Dies kann zwar die realen Verhältnisse in den Reibkontakten auf mikroskopischer Ebene selbst nicht genau abbilden, hat aber deutlich stabilere und leichter zu modellierende FE-Modelle zur Folge. Der Fehler gegenüber der Realität ist in den hier untersuchten Fällen weiterhin als vernachlässigbar

anzusehen, da das Ziel eine Aussage über makroskopische Effekte ist.

Die Schrauben werden im realen Fall mit einer entsprechenden Schraubenvorspannung verspannt und dies kann in einem FEM-System durch das Aufbringen einer Vorspannkraft und das anschließende Sperren der infolge der Vorspannkraft erreichten Verformungen nachgebildet werden.

Der Freilaufaußenring wird, wie im realen Betrieb auch, durch die Klemmnormalkräfte  $F_{\text{NK}}$  und Klemmumfangskräfte  $F_{\text{UK}}$  an den diskreten über den Umfang verteilten Klemmstellen  $z_K$  belastet. Die Klemmkraft greifen hierbei annähernd als Linienlasten an. Im 3D-FE-Vollmodell werden diese Kräfte demnach ebenfalls zuerst einmal als diskret verteilte Kräfte modelliert, die entlang einer Linie über die Klemmbreite  $b_K$  angreifen.

Um aus dem Ergebnis der FE-Simulation das Kräfteverhältnis  $\frac{\Delta F_R}{F_{\text{NK}}}$  zu erhalten, wird der Freilaufaußenring innerhalb des Klemmbereichs mit Kräften an den  $z_K$  Klemmstellen<sup>3</sup> belastet. Relevant für die infolge der behinderten radialen Aufweitung entstehenden radialen Zusatzkräfte  $\Delta F_R$  in der Reibfuge ist nur der die radiale Aufweitung hervorrufende Lastanteil der Klemmnormalkraft  $F_{\text{NK}}$ . Dieser wird in radialer Richtung entsprechend an den Klemmstellen modelliert. Der das Sperrmoment bewirkende Anteil in tangentialer Richtung (die Klemmumfangskräfte  $F_{\text{UK}}$ ) kann ebenfalls modelliert werden, hat jedoch keinen Einfluss auf die entstehenden Zusatzkräfte.

Für die Vernetzung wurden quadratische und bevorzugt hexaedrische Elemente genutzt und als Ergebnis jeweils die Kraftreaktion in radialer Richtung im Hauptkontakt ausgewertet. Durch das Beziehen der sich infolge der Klemmnormalkräfte ergebenden Kraftänderung  $\Delta F_R$  in radialer Richtung wiederum auf die in radialer Richtung wirkenden Klemmnormalkräfte  $F_{\text{NK}}$  ergibt sich aus der Simulation das zu bestimmende Kräfteverhältnis  $\frac{\Delta F_R}{F_{\text{NK}}}$ .

### **Vereinfachung 1: Innendruck**

Als erste Vereinfachung bietet sich die Reduzierung der Klemmnormalkräfte an den  $z_K$  diskret über den Umfang verteilten Klemmstellen auf einen äquivalenten, partiell über die gesamte ringförmige Klemmfläche wirkenden Innendruck an. Die-

---

<sup>3</sup>In diesem Fall  $z_K = 7$ .



se Vereinfachung zeigte bei Kombination mit allen weiteren im Zuge dieses Unterabschnitts diskutierten Vereinfachungen keinen Einfluss auf das sich aus der FE-Simulation ergebende Kräfteverhältnis. Diese Vereinfachung ist demnach zulässig.

Die Nichtbeeinflussung der sich ergebenden Kräfteverhältnisse liegt wohl zum Teil auch an der dahinterstehenden impliziten Vereinfachung einer globalen Auswertung des stirnseitigen Kontakts. Je mehr Klemmstellen ein realer Freilauf aufweist, desto geringer sollte jedoch der zu erwartende grundsätzliche Fehler gegenüber der Realität sein.

### Vereinfachung 2: betrachtete Körper

Wird nun das in Abb. 5.3 dargestellte 3D-FE-Vollmodell entsprechend vollständig mit Reibkontakten<sup>4</sup> ( $\mu = 0,2$ ) und Schraubenvorspannung<sup>5</sup> modelliert, so ergibt sich für das Kräfteverhältnis (sowohl mit diskret verteilten Klemmkraften als auch mit äquivalentem Innendruck) ein Wert von

$$\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} \approx 0,129 \quad .$$

Hierzu ist anzumerken, dass die 3D-FE-Modelle mit einer Elementgröße von 1 mm im Kontakt vernetzt wurden. Wie sich bei später durchgeführten weiteren FE-Simulationen gezeigt hat, nimmt die ermittelte radiale Kontaktkraft mit steigender Netzdichte, also abnehmender Elementgröße zu. Gleichzeitig steigt jedoch der Rechenaufwand stark an, weshalb in diesem Wert ein Kompromiss zu sehen ist und man nicht der Vorstellung verfallen darf, diesen als den der Realität am nächsten kommenden Wert anzusehen. Die folgenden 3D-FE-Simulationen wurden bei den gleichen Netzeinstellungen durchgeführt, um eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse zueinander zu erhalten.

Wird nun der Festlagerbock aus dem 3D-FE-Modell entfernt und somit nur noch, bei ansonsten gleichen Modelleinstellungen, der stirnseitige Verbund aus Freilaufaußenring und Anschlussflansch betrachtet, ergibt sich für das Kräfteverhältnis der

<sup>4</sup>Einzig die Einschraubteile der Schrauben sind als Verbundkontakte modelliert, was dem realen Zustand wiederum am nächsten kommt.

<sup>5</sup>9 kN an den Schrauben der Freilaufverschraubung und 27 kN an den Schrauben der Flanschverschraubung.

folgende leicht höhere Wert von

$$\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} \approx 0,133 \quad .$$

Die Reduzierung der im FE-Modell betrachteten Körper auf die beiden Körper des **Hauptkontakts** bewirkt eine leichte Erhöhung der berechneten Kräfteverhältnisse. Da dies eine Abweichung zur „sicheren Seite“ hin bedeutet, wird diese Vereinfachung als zulässig angesehen. Bei diesem Modellaufbau ist die Freilaufverschraubung und der zugehörige reibbehaftete **Hauptkontakt** weiterhin erhalten. Der **Nebenkontakt** sowie die **zweite Kontaktgruppe** brauchen nicht mehr modelliert zu werden, was eine weitere Vereinfachung des FE-Modells bedeutet.

Eine weitere Reduzierung der betrachteten Körper ist – abgesehen von den Schrauben der Freilaufverschraubung (**erste Kontaktgruppe**) – nicht sinnvoll.

### Vereinfachung 3: Schraubenvorspannung und Kontakte

Die nächstmögliche Modellvereinfachung wurde bereits eingangs diskutiert und stellt die Verwendung von Verbundkontakten anstatt der bisher verwendeten Reibkontakte für den **Haupt-** und **Nebenkontakt** dar. Mit dem Wechsel von Reibkontakten auf Verbundkontakte geht auch die Vernachlässigung der Schraubenvorspannung einher, da diese nun nicht mehr erforderlich ist. Diese Vereinfachung des Modells hatte merklich erhöhte Kräfteverhältnisse zur Folge. Bei einem Modellaufbau mit allen drei Hauptkörpern (Festlagerbock, Anschlussflansch und Freilaufaußenring) ergab sich ein Kräfteverhältnis von

$$\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} \approx 0,155 \quad .$$

Beim entsprechenden Modellaufbau mit zwei Hauptkörpern (Anschlussflansch und Freilaufaußenring) ergab sich ein wiederum etwas geringerer Wert von immer noch

$$\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} \approx 0,150 \quad .$$

Die Vernachlässigung der Schraubenvorspannung scheint demnach eine Erhöhung des numerisch berechneten Kräfteverhältnisses nach sich zu ziehen, was wiederum eine Abweichung zur „sicheren Seite“ bedeutet.

### Vereinfachung 4: Rotationssymmetrie

Nachdem die Reduzierung der betrachteten Körper auf die beiden Hauptkörper des Anschlussflanschs und Freilaufaußenrings und die Vernachlässigung der Schraubenvorspannung mit dem einhergehenden Wechsel auf einen Verbundkontakt für den **Hauptkontakt** zwar Abweichungen zu dem vollständigen 3D-FE-Modell mit Reibkontakten erzeugten, diese sich jedoch allesamt als zulässig herausstellten, stellt sich die Frage nach weiteren möglichen Vereinfachungen des verbliebenen 3D-FE-Modells.

Im ersten Schritt wurden bereits die diskreten Klemmkräfte in einen rotationssymmetrisch am Innendurchmesser des AR angreifenden Innendruck überführt. In einem nächsten Schritt sollte demnach geprüft werden, inwieweit sich das 3D-FE-Modell vollständig rotationssymmetrisch aufbauen lässt. Da es sich bei den meisten stirnseitig befestigten Freiläufen um Freiläufe ohne Außenstern handelt, ist eine Überführung des verbliebenen Modells in eine vollständige Rotationssymmetrie durch das Weglassen der Freilaufverschraubung (**erste Kontaktgruppe**) einfach möglich. Wird diese Vereinfachung vorgenommen, was natürlich nur mit einem Verbundkontakt für den **Hauptkontakt** möglich ist, so ergibt sich für das Kräfteverhältnis ein Wert von

$$\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} \approx 0,136 \quad .$$

Eine weitere Vereinfachung des Modells, die mit einer deutlich einfacheren Vernetzung des Modells einhergeht, ist es, die beim hier untersuchten Freilauf *Modell 1* vorhandenen Sicherungsringnuten nicht mit zu modellieren. Mit dieser weiteren Vereinfachung ergibt sich ein Kräfteverhältnis von

$$\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} \approx 0,136 \quad .$$

Die konsequente weitere Vereinfachung des 3D-Modells durch die Überführung in ein rotationssymmetrisches Modell mit Verbundkontakten stellt somit eine zulässige Vereinfachung dar, die zwar eine Überschätzung der radialen Zusatzkräfte (von in diesem Fall ca. 6 %) gegenüber dem vollständigen 3D-FE-Modell nach sich zieht, aber damit auch eine konservative Abschätzung darstellt.

Allgemein sei angemerkt, dass selbst bei Verwendung von einfach handhabbaren Verbundkontakten eine Abhängigkeit der Ergebnisse von der Netzdichte und vom Netzaufbau verbleibt. Dies ist erfahrenen FE-Anwendern sicherlich bekannt,

macht eine Berechnung des Kräfteverhältnisses über die FEM jedoch aufwendig und selbst bei Verwendung von 2D-Modellen rechenintensiv, da eine feinere Vernetzung im Kontakt zu genaueren Ergebnissen führen sollte. Inwiefern die über FE-Simulationen bestimmten Kräfteverhältnisse die wirklichen Verhältnisse in der realen Anwendung abbilden, ist nur schwer festzustellen, da in Versuchen diese Kräfte ebenso wie die wirkenden Reibwerte in den Kontakten nicht direkt gemessen werden können. Eine vergleichende Abschätzung verschiedener Konstruktionsvarianten ist unter der Bedingung einer gleichen Modellerstellung jedoch immer möglich.

### 5.1.2 2D-FE-Modell

Nachdem im vorherigen Unterabschnitt gezeigt wurde, dass eine Vereinfachung des vollständigen 3D-FE-Modells mit Reibkontakten hin zu einem rotationssymmetrischen 3D-Modell mit Verbundkontakten zulässig ist und nur eine geringe Überschätzung des vermutlich am genauesten anzusehenden Werts des vollständigen 3D-FE-Modells mit Reibkontakten nach sich zieht, wurde in einem nächsten Schritt, hin zu einem einfacheren und schneller zu berechnenden FE-Modell ein rotationssymmetrisches bzw. axialsymmetrisches 2D-FE-Modell der zu untersuchenden stirnseitigen Befestigung aus Abb. 5.3 aufgebaut.

Die nachfolgenden 2D-FE-Modelle sind alle ohne Schrauben und die durch die sie aufgebrachten Vorspannungen und mit Verbundkontakten modelliert. Bei dieser Art der Modellierung soll untersucht werden, welchen Einfluss die für die Berechnung immer erforderlichen Lagerungsrandbedingungen auf die ermittelten radialen Zusatzkräfte haben.

Wird das 2D-FE-Modell nun mit allen drei Hauptkörpern aufgebaut und mit einer Elementgröße von 0,5 mm vernetzt, so ergibt sich für eine feste Einspannung des Lagerbocks ein Kräfteverhältnis in Höhe von

$$\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} \approx 0,146 \quad .$$

Der entsprechende Modellaufbau ist in Abb. 5.4 dargestellt. Wie bei den bisherigen FE-Modellen auch, werden die Klemmnormalkräfte über den gesamten möglichen Klemmbereich des Freilaufaußenrings aufgebracht. Wird das gleiche Modell mit einer Elementgröße von 0,1 mm deutlich feiner vernetzt, so ergibt sich bei ansonsten

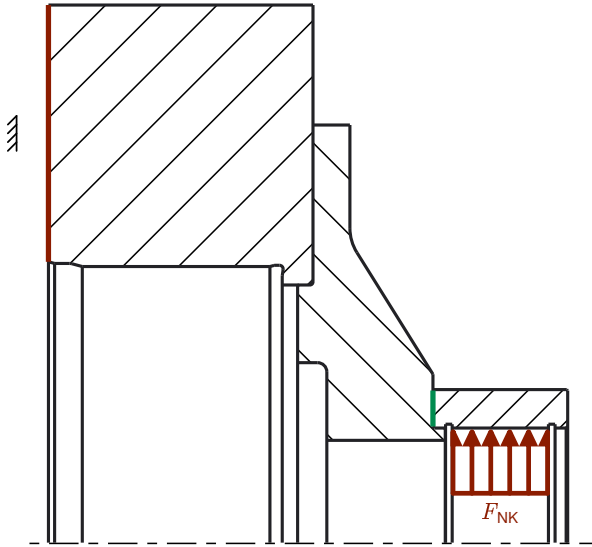


Abb. 5.4: 2D-FE-Modell des Freilaufs *Modell 1* in Versuchskonfiguration mit fester Einspannung des Festlagerbocks

gleichem Modellaufbau ein Wert von

$$\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} \approx 0,152 \quad .$$

Im Folgenden sollen nur die mit einer Elementgröße von 0,1 mm feiner vernetzten 2D-FE-Modelle miteinander verglichen werden.

Wird das 2D-FE-Modell nun an der oberen oder unteren Kante des Festlagerbocks (siehe z.B. Abb. 5.5) gelenkig gelagert, so ergibt sich für das Kräfteverhältnis ein Wert von

$$\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} \approx 0,152 \quad .$$

Ein annähernd gleiches Ergebnis von 0,152 wird auch bei einer losen, also in radialer Richtung frei verschieblichen, Lagerung erhalten.

Eine feste und somit biegesteife Lagerung hat demnach keine deutlich größere radiale Zusatzkraft zur Folge, als eine biegeweiche gelenkige oder sogar verschiebbliche Lagerung. Anders verhält es sich, wenn im 2D-FE-Modell nur noch die beiden Hauptkörper des Freilaufaußenrings und des Anschlussflanschs betrachtet wer-

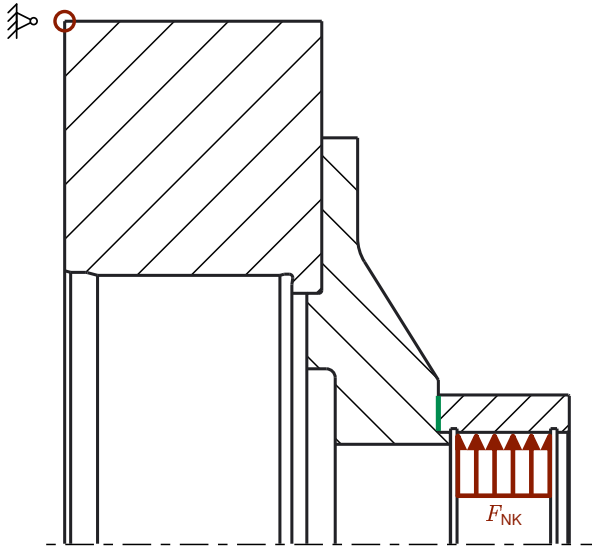


Abb. 5.5: 2D-FE-Modell des Freilaufs *Modell 1* in Versuchskonfiguration mit gelenkiger Einspannung des Festlagerbocks an oberer Kante

den. Bei diesem weiter vereinfachten Modellaufbau wird die jeweilige Lagerungsrandbedingung auf den ehemaligen Kontaktbereich zwischen dem Festlagerbock und dem Anschlussflansch (**Nebenkontakt**) aufgebracht (siehe Abb. 5.6).

Für die feste Einspannung in diesem Bereich ergibt sich für das Kräfteverhältnis ein Wert von

$$\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} \approx 0,150$$

und für eine gelenkige (biegeweiche) Lagerung mit einem Gelenk an der unteren Kante des ehemaligen Kontaktbereichs ein Wert von

$$\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} \approx 0,145 \quad .$$

Für eine gelenkige Lagerung an der oberen Kante des ehemaligen Kontaktbereichs ergibt sich wiederum ein etwas geringerer Wert von

$$\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} \approx 0,140$$

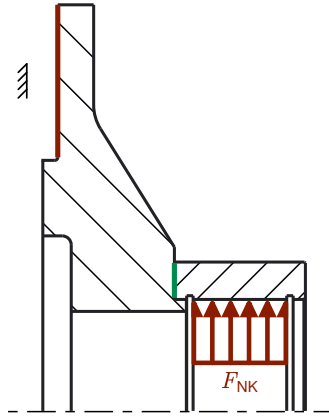


Abb. 5.6: 2D-FE-Modell des Freilaufs *Modell 1* mit Anschlussflansch in Versuchs-konfiguration mit fester Einspannung im ehemaligen Kontaktbereich mit dem Festlagerbock

und für eine lose Lagerung ein nochmals etwas geringer Wert von

$$\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} \approx 0,138 \quad .$$

Die lose bzw. gelenkige Lagerung entspricht hierbei der im vollständigen 3D-FE-Modell verwendeten Lagerung wohl am besten, da in diesem Modell der Festlagerbock über seine Aufstandsfläche fixiert war und sich ansonsten frei verformen konnte. Die Abweichungen zu dem vollständigen 3D-FE-Modell betragen bei Verwendung einer gelenkigen Lagerung maximal ca. 18 %. Dies mag auf den ersten Blick viel erscheinen, ist jedoch noch als zulässig anzusehen, da zum einen durch eine Änderung der Modellparameter (Vernetzung, Kontaktalgorithmus, usw.) Abweichungen von bis zu 38 % aufgetreten sind und zum anderen, da die Abweichungen in diesem Fall gegenüber dem vollständigen 3D-FE-Modell wiederum auf der „sicheren Seite“ liegen. Deshalb scheint die Verwendung von 2D-FE-Modellen anstatt von 3D-FE-Modellen eine zulässige weitere Vereinfachung zu sein.

Bei den durchgeführten Simulationen mit den drei Hauptkörpern (Festlagerbock, Anschlussflansch und Freilaufaußenring) zeigte sich, dass die Art der Lagerung des Festlagerbocks keinen merklichen Einfluss auf das sich ergebende Kräfteverhältnis hatte. Dies kann so gedeutet werden, dass über die Länge des gesamt-

ten stirnseitigen Verbunds die infolge der radial aufweitenden Klemmnormalkräfte hervorgerufene Randstörung zur Lagerung bereits vollständig abgeklungen war. Anders verhält es sich bei den Simulationen mit den zwei Hauptkörpern des Anschlussflanschs und Freilaufaußenrings. Bei diesen ist die axiale Länge des gesamten Verbunds deutlich kürzer, weshalb die Art der Lagerung noch einen deutlichen Einfluss auf das Ergebnis der 2D-FE-Simulation aufweist. Interessanterweise scheint eine feste Lagerung des Anschlussflanschs den (2D-FE-)Ergebnissen des längeren Verbunds aus den drei Hauptkörpern am nächsten zu kommen.

Bei den bisherigen FE-Simulationen wurde die Klemmkraft auf den beim Freilauf *Modell 1* konstruktiv möglichen Klemmbereich aufgebracht. Dieser ist jedoch mit 31,3 mm deutlich breiter als die Breite der Klemmrollen von 25 mm. Wird die reale Breite der Klemmrollen in diesem Fall berücksichtigt, reduzieren sich die radialen Zusatzkräfte. Beim 2D-FE-Modell mit drei Hauptkörpern und einer festen Einspannung des Festlagerbocks reduzierte sich das Kräfteverhältnis in diesem Fall um ca. 11 %.

### 5.1.3 Vereinfachtes 2D-FE-Modell

Als Referenz und Vergleichsgröße für das nachfolgend beschriebene Starrkörper- und das elastomechanische Kreisring-Schalenmodell wurde ein vereinfachtes 2D-FE-Modell aufgestellt. Dieses Modell besitzt den in Abb. 5.7 gezeigten Aufbau. Es besteht aus zwei stirnseitig über einen Verbundkontakt miteinander verbundenen Hohlzylindern, von denen der eine den Freilaufaußenring mit seinen Hauptabmessungen (Innendurchmesser  $d_{AR}$ , Außendurchmesser  $D_{AR}$  und Breite  $b_{AR}$ ) und der andere den Anschlussflansch wiederum mit seinen Hauptabmessungen (Innendurchmesser  $d_{FL}$ , Außendurchmesser  $D_{FL}$  und Breite  $b_{FL}$ ) repräsentiert. Der Freilaufaußenring wird hierbei von den Klemmnormalkräften  $F_{NK}$  innerhalb des Klemmbereichs  $b_K$  modelliert als äquivalenter Innendruck belastet. Der Klemmbereich liegt hierbei mittig innerhalb der Breite des Freilaufaußenrings.

Der Flanschkörper ist an der dem stirnseitigen Kontakt abgewandten Seite gelagert, wobei hierbei verschiedene Lagerungsbedingungen untersucht wurden. Zum einen eine feste Einspannung der gesamten Fläche, was einer biegesteifen Lagerung entspricht. Zum anderen wurden biegeeweiche gelenkige Einspannungen an der äußeren (oben) und inneren Kante (unten) sowie eine frei verschiebbliche und



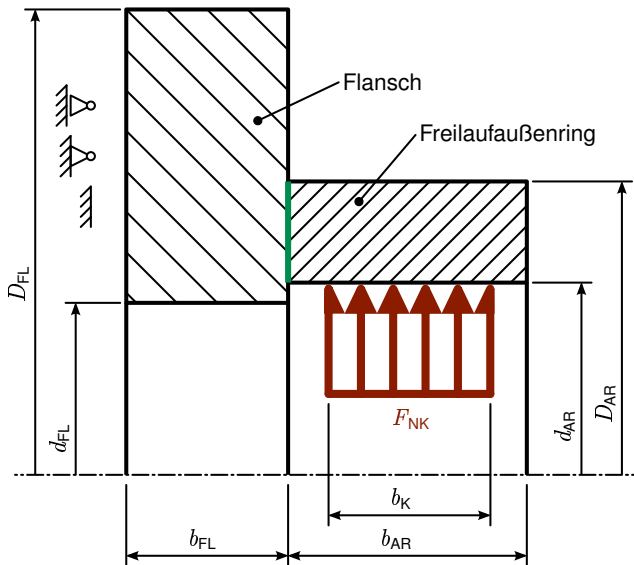


Abb. 5.7: Vereinfachtes 2D-FE-Modell des stirnseitigen Verbunds von Freilauf und Flansch mit verschiedenen Lagerungsbedingungen

ebenfalls biegeeweiche Lagerung simuliert.

Mit diesem Modell wurden die im Anhang B aufgeführten Designpoints in einer Parameterstudie untersucht. Ein Designpoint beinhaltet hierbei eine bestimmte Kombination der in Abb. 5.7 gezeigten Geometrieparameter. Als Ergebnis der FE-Parametersimulationen wird das Kräfteverhältnis von aufgebracht (Gesamt-) Klemmnormalkraft zu radialer Zusatzkraft im Kontakt zwischen Freilaufaußenring und Flansch (in Abb. 5.7 farblich hinterlegt) pro Designpoint ausgewertet.

Bei der Parameterstudie wurden die Hauptgeometrieparameter des Freilaufaußenrings jeweils an die vier Freilaufmodelle *Modell 1* bis *Modell 4* aus Tab. 6.1 angepasst und hierzu jeweils einer der verbleibenden vier Parameter ( $d_{FL}$ ,  $D_{FL}$ ,  $b_{FL}$  und  $b_K$ ) nach dem anderen variiert.

In einem ersten Block pro Freilaufmodell wurde die Flanschbreite  $b_{FL}$  in einem Bereich von 10 mm bis 1000 mm variiert. Das Ergebnis dieses Blocks für den Freilauf *Modell 1* ist in Abb. 5.8 gezeigt. Eine feste (biegesteife) Einspannung erhöht grundsätzlich die sich aus der behinderten Aufweitung entwickelnde radiale Zusatzkraft,

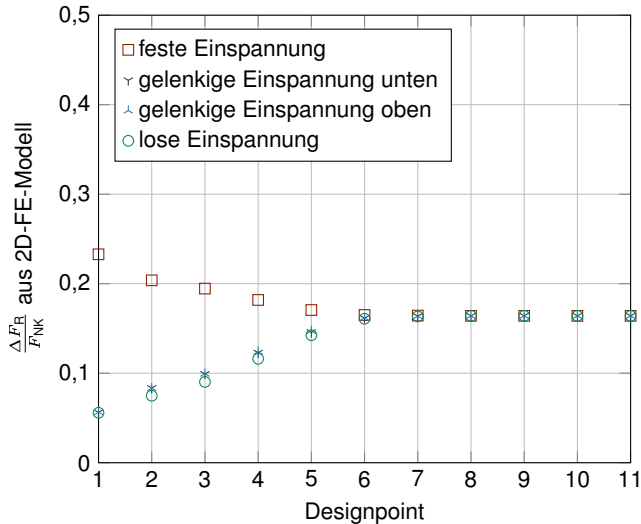


Abb. 5.8: Referenz-Kräfteverhältnisse als Ergebnis des vereinfachten 2D-FE-Modells unter Variation der Flanschbreite  $b_{FL}$  am stirnseitigen Verbund des Freilaufs *Modell 1*

während eine gelenkige bzw. lose Einspannung deutlich geringe radiale Zusatzkräfte zur Folge haben. Weiterhin verhält sich die gelenkige Lagerung mit oberem Einspannpunkt quasi genauso wie bei einem unteren Einspannpunkt und hat nur geringfügig größere Kräfteverhältnisse zur Folge als eine lose (radial verschiebliche) Lagerung. Es ist jedoch zu erkennen, dass ab einer bestimmten Flanschbreite (in diesem Fall ab Designpoint 6 mit  $b_{FL} \geq 50$  mm) die Art der Einspannung bzw. Lagerung des Flanschs keinen Einfluss mehr auf das sich ergebende Kräfteverhältnis hat und sich die für die jeweilige Einspannsituation ergebenden Kräfteverhältnisse aneinander angleichen.

Der zweite Block je Freilaufmodell beinhaltet die Variation des Flanschaußendurchmessers  $D_{FL}$  und ist für den Freilauf *Modell 1* in Abb. 5.9 gezeigt. Bei den Freiläufen *Modell 1* und *Modell 2* wurden die Flanschaußendurchmesser beginnend ab dem jeweiligen Freilaufaußendurchmesser  $D_{AR} + 1$  mm bis 500 mm und bei den Freiläufen *Modell 3* und *Modell 4* von ebenfalls  $D_{AR} + 1$  mm bis 750 mm variiert. Der Unterschied zwischen den verschiedenen Einspannungen pro Designpoint liegt in diesem Fall daran, dass die Flanschbreiten  $b_{FL}$  bei diesen Designpoints unterhalb

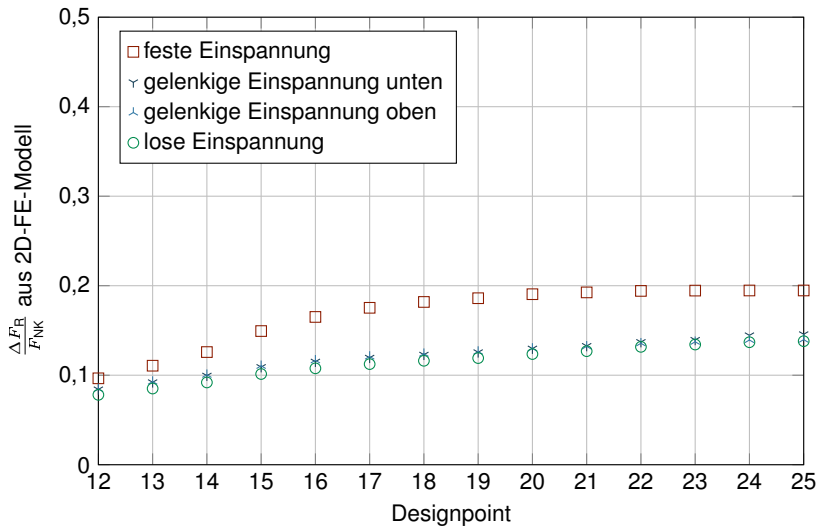


Abb. 5.9: Referenz-Kräfteverhältnisse als Ergebnis des vereinfachten 2D-FE-Modells unter Variation des Flanschaußendurchmessers  $D_{FL}$  am stirnseitigen Verbund des Freilaufs *Modell 1*

der Grenze liegen, ab der sie keinen Einfluss mehr hätten. Es ist demnach zu erkennen, dass mit zunehmendem Flanschaußendurchmesser auch das sich ergebende Kräfteverhältnis ansteigt, wobei das Kräfteverhältnis bei einer festen Einspannung ab einem bestimmten Wert nicht weiter zunimmt.<sup>6</sup>

Der dritte Block je Freilaufmodell stellt die Variation des Flanschinnendurchmessers  $d_{FL}$  dar. Dieser wird bei den Freiläufen *Modell 1* und *Modell 2* von 10 mm bis  $d_{AR} - 1 \text{ mm}$ <sup>7</sup> und bei den Freiläufen *Modell 3* und *Modell 4* von 15 mm bis  $d_{AR} - 1 \text{ mm}$ <sup>8</sup> variiert. Das Ergebnis dieser Variation ist wiederum exemplarisch für den Freilauf *Modell 1* in Abb. 5.10 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass mit zunehmendem Flanschinnendurchmesser das Kräfteverhältnis abnimmt.

Aus der Variation des Flanschaußen- und -innendurchmessers ist weiterhin zu erkennen, dass für ein möglichst geringes sich ergebendes Kräfteverhältnis der Anschlussflansch in etwa den gleichen Innen- und Außendurchmesser wie der Frei-

<sup>6</sup>In diesem Fall ab Designpoint 21 mit einem Flanschaußendurchmesser  $D_{FL} = 200 \text{ mm}$  bei einem Freilaufaußendurchmesser des *Modell 1* von  $D_{AR} = 100 \text{ mm}$ .

<sup>7</sup>Bei den Freiläufen *Modell 1* und *Modell 2* beträgt  $d_{AR} = 75 \text{ mm}$ .

<sup>8</sup>Bei den Freiläufen *Modell 3* und *Modell 4* beträgt  $d_{AR} = 110 \text{ mm}$ .

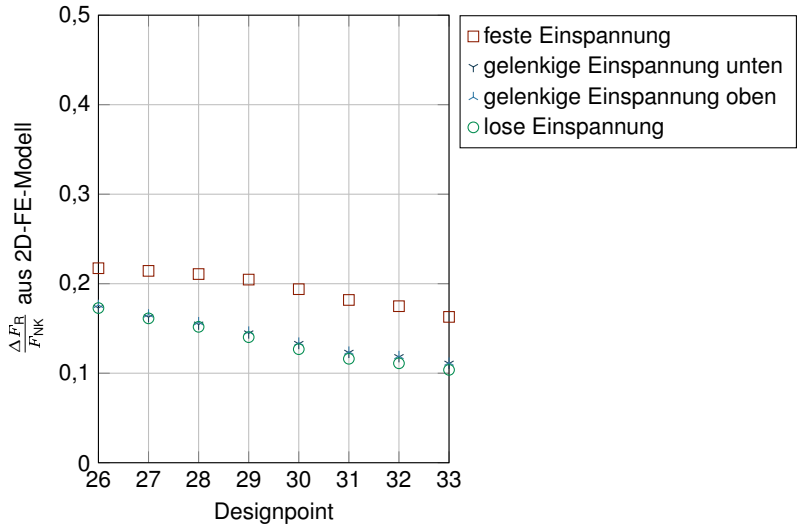


Abb. 5.10: Referenz-Kräfteverhältnisse als Ergebnis des vereinfachten 2D-FE-Modells unter Variation des Flanschinnendurchmessers  $d_{FL}$  am stirnseitigen Verbund des Freilaufs *Modell 1*

laufaußenring aufweisen sollte. Je nach Art der Einspannbedingung ruft jedoch entweder ein kurzer (bei gelenkiger oder loser Lagerung) oder ein mittellanger Anschlussflansch (bei fester Einspannung) eine möglichst geringe radiale Zusatzkraft hervor.

Der letzte Block je Freilaufmodell stellt die Variation der Klemmbreite  $b_K$  dar. Hierbei wird ausgehend von einer minimalen Klemmbreite von angenommenen 10 mm die Klemmbreite  $b_K$  in 5 mm-Schritten bis maximal einen Schritt vor die Breite des jeweiligen Freilaufaußenrings  $b_{AR}$  erhöht. Das Ergebnis für diese Parametervariation ist in Abb. 5.11 für den Freilauf *Modell 1* dargestellt. Mit zunehmender Klemmbreite nimmt das Kräfteverhältnis zu, da sich die durch die Klemmnormalkräfte eingebrachte Verformung nur über eine kurze axiale Länge hin zur stirnseitigen Verbindung wieder abbauen kann.

Die letzten acht Parametervariationen (Designpoint 159 bis 166) stellen die jeweils aus den vorherigen Parametern ermittelte optimale Kombination<sup>9</sup> für eine feste

<sup>9</sup>Also eine ein möglichst geringes Kräfteverhältnis hervorrufende Geometrie des vereinfachten Anschlussflanschs.

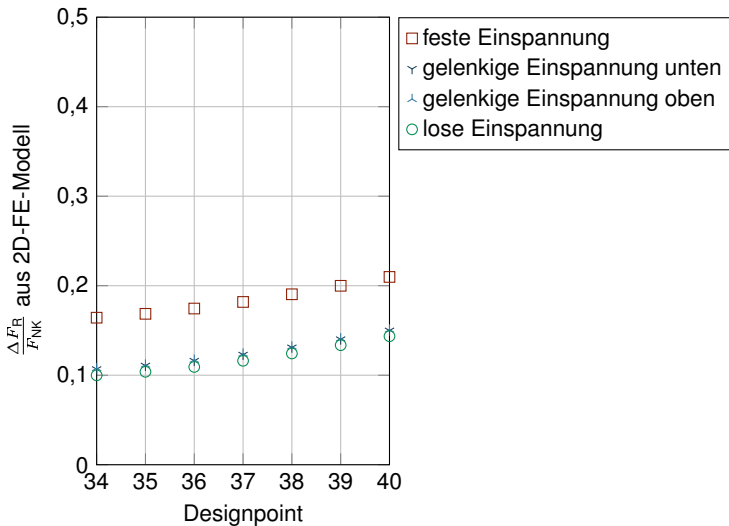


Abb. 5.11: Referenz-Kräfteverhältnisse als Ergebnis des vereinfachten 2D-FE-Modells unter Variation der Klemmbreite  $b_K$  am stirnseitigen Verbund des Freilaufs *Modell 1*

(Designpoint 159 bis 162) und eine lose Einspannung (Designpoint 163 bis 166) für die vier jeweiligen Freilaufmodelle dar. Die Ergebnisse dieser Designpoints sind in Abb. 5.12 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass bei den optimalen Designpoints für eine feste Einspannung die Ergebnisse von allen Einspannsituationen annähernd gleich sind, da die Grenzlänge des Anschlussflanschs überschritten ist. Bei den optimalen Parameterkombinationen für die lose Lagerung ergeben sich natürlich große radiale Zusatzkräfte für die feste Einspannung, da der Freilaufaußenring quasi direkt gegen die biegesteife Einspannung verspannt wird.

Werden nun alle Parametervariationen für die jeweiligen Freilaufmodelle aneinandergereiht, ergibt sich das in Abb. 5.13 dargestellte Diagramm.

## 5.2 Einfaches Federmodell

Eine einfache Möglichkeit, die radialen Zusatzkräfte – zumindest sehr grob – abzuschätzen, stellt ein einfaches Federmodell dar. Diesem Modell liegt der in Abb. 5.14

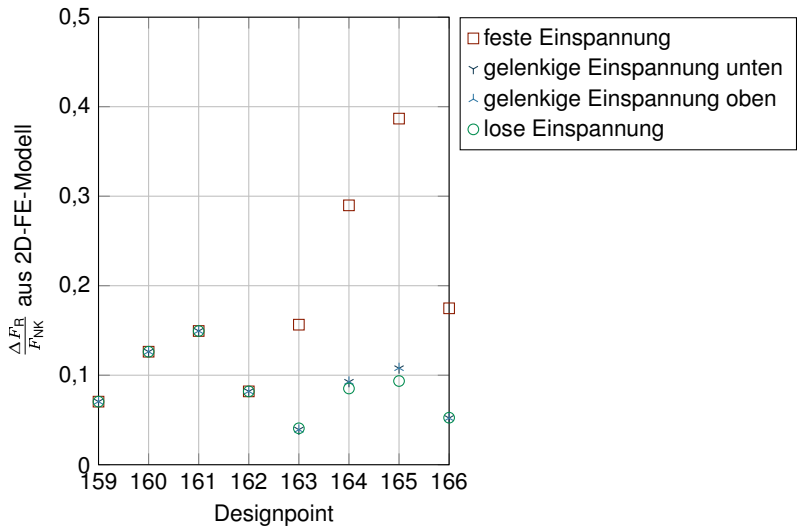


Abb. 5.12: Referenz-Kräfteverhältnisse als Ergebnis des vereinfachten 2D-FE-Modells für die optimalen Parameterkombinationen der jeweiligen Freilaufmodelle bei fester und loser Einspannung

dargestellte Aufbau zugrunde. Gegenüber den Verhältnissen am realen Freilaufaußenring wurden die diskreten Klemmkräfte zu einem äquivalenten Innendruck  $p_k$  zusammengefasst. Weiterhin wird der Klemmbereich  $b_k$  vernachlässigt und angenommen, dass die Klemmkräfte und damit der Innendruck auf die komplette Breite des Freilaufaußenrings wirken.

Der äquivalente Innendruck  $p_k$  beträgt in diesem Fall

$$p_k = \frac{F_{\text{NK}}}{\pi \cdot d_{\text{AR}} \cdot b_{\text{AR}}} \tag{5.1}$$

und bedeutet anschaulich, dass die Summe aller Klemmnormalkräfte  $F_{\text{NK}}$  auf die Innenfläche des Freilaufaußenrings bezogen wird. Wird das System aus stirnseitig verbundenem Freilaufaußenring und Flansch nun freigeschnitten und die Schnittkräfte  $\Delta F_{\text{R}}$  in radialer Richtung angetragen sowie das System um eine Betrachtung der radialen Steifigkeiten erweitert, so ergibt sich das in Abb. 5.15 dargestellte Bild.

Für die Radialverschiebung eines Hohlzylinders unter Innendruck gilt, z.B. nach

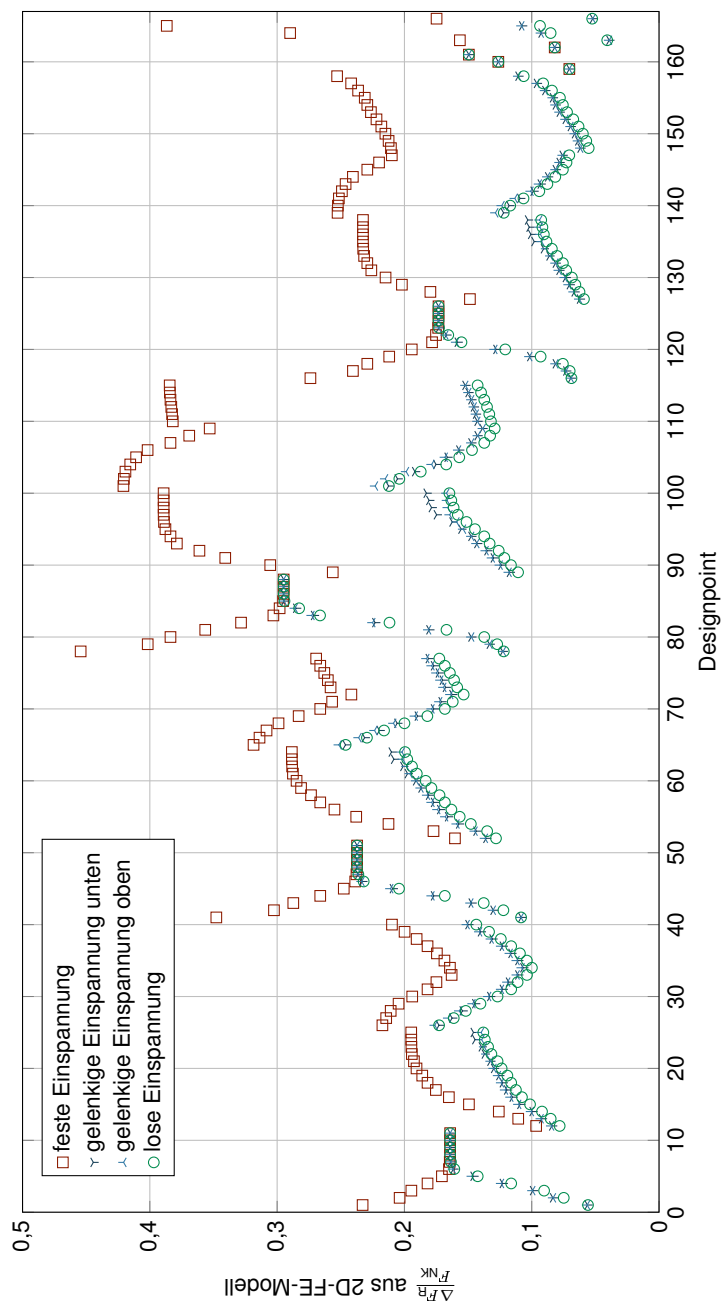


Abb. 5.13: Referenz-Kräfteverhältnisse als Ergebnis des vereinfachten 2D-FE-Modells für verschiedene Designpoints

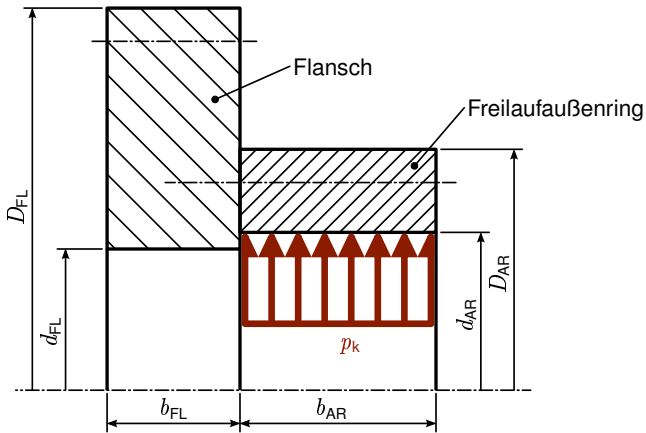


Abb. 5.14: Modellvorstellung am stirnseitig befestigten Freilauf

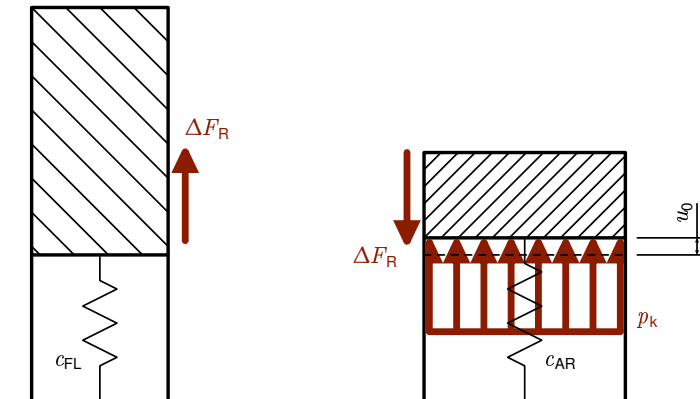


Abb. 5.15: Freischnitt am stirnseitig befestigten Freilauf



[GHSW07], unter der Annahme eines ebenen Spannungszustands (ESZ)

$$u^{\text{ESZ}}(r) = \frac{p}{E} \cdot \frac{d^2}{D^2 - d^2} \cdot \left[ (1 - \nu) + \frac{D^2}{4 \cdot r^2} \cdot (1 + \nu) \right] \cdot r \quad (5.2)$$

Die Annahme eines ebenen Spannungszustands an Rohren unter Innendruck bedeutet, dass axiale Spannungen vernachlässigt werden. Diese Vereinfachung trifft in der Regel nur für dünnwandige und axial nicht belastete Hohlzylinder zu.

Unter der Annahme eines ebenen Verzerrungszustands (EVZ) ergibt sich für die Radialverschiebung nach [GHSW07] wiederum der geänderte Ausdruck

$$u^{\text{EVZ}}(r) = \frac{p}{E} \cdot \frac{d^2}{D^2 - d^2} \cdot (1 + \nu) \cdot \left[ (1 - 2 \cdot \nu) + \frac{D^2}{4 \cdot r^2} \right] \cdot r \quad (5.3)$$

Der ebene Verzerrungszustand ergibt sich bei einer Dehnungsbehinderung in axialer Richtung, wie sie zum Beispiel durch eine beidseitig starre Einspannung hervorgerufen werden würde.

Eine weitere mögliche Annahme des vorliegenden Spannungs-Verzerrungszustands stellt der rotationssymmetrische Spannungszustand (RSZ) nach z.B. [Grü05] dar. Wird dieser für die Berechnung der elastischen Radialverschiebung angenommen, so ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$u^{\text{RSZ}}(r) = \frac{p}{E} \cdot \frac{d^2}{D^2 - d^2} \cdot \left[ (1 - 2 \cdot \nu) + \frac{D^2}{4 \cdot r^2} \cdot (1 + \nu) \right] \cdot r \quad (5.4)$$

Diesem Spannungszustand liegt die Annahme einer dem Mittelwert aus Tangential und Radialspannung entsprechenden Axialspannung zugrunde. Dies entspricht einem unter Innendruck stehenden Zylinder mit geschlossenen Enden. (Die obigen Formeln für die Aufweitung eines dickwandigen Behälters unter Innendruck entsprechen den bereits in Unterabschnitt 3.5.6 aufgeführten aus [Cha06].)

Setzt man den äquivalenten Innendruck aus Gleichung (5.1) z.B. in den sich aus Gleichung (5.2) für die Radialverschiebung unter Annahme eines ESZ am Innendurchmesser des AR (Aufweitung  $u_0$ ) ergebenden Ausdruck ein, so ergibt sich der folgende Zusammenhang:

$$u_0 = u_{\text{AR}} \left( \frac{d_{\text{AR}}}{2} \right) = \frac{F_{\text{NK}}}{2 \cdot \pi \cdot E_{\text{AR}} \cdot b_{\text{AR}}} \cdot \left[ \frac{D_{\text{AR}}^2 + d_{\text{AR}}^2}{D_{\text{AR}}^2 - d_{\text{AR}}^2} + \nu_{\text{AR}} \right] \quad (5.5)$$

Wird nun die radiale Steifigkeit des Freilaufaußenrings  $c_{\text{AR}}$  als das Verhältnis von

aufweitender Klemmnormalkraft  $F_{\text{NK}}$  zu daraus resultierender Aufweitung am Kraftangriffsort  $u_0$  definiert, so ergibt sich wiederum:

$$c_{\text{AR}} = \frac{F_{\text{NK}}}{u_0} = \frac{2 \cdot \pi \cdot E_{\text{AR}} \cdot b_{\text{AR}}}{\left[ \frac{D_{\text{AR}}^2 + d_{\text{AR}}^2}{D_{\text{AR}}^2 - d_{\text{AR}}^2} + \nu_{\text{AR}} \right]} \quad (5.6)$$

Analog lässt sich auch eine radiale Steifigkeit  $c_{\text{FL}}$  für den Anschlussflansch definieren. Hierbei wird der betrachtete Radius  $r$  in Gleichung (5.2) wiederum gleich dem halben Innendurchmesser des Freilaufaußenrings gesetzt. Somit ergibt sich für die radiale Verschiebung des Flansches auf Höhe des Innendurchmessers des AR durch einen ebenso auf diesen Durchmesser  $d_{\text{AR}}$  und die Breite des Flansches  $b_{\text{FL}}$  bezogenen Innendruck  $p_i$  (analog zu Gleichung (5.1)):

$$u_{\text{FL}} \left( \frac{d_{\text{AR}}}{2} \right) = \frac{p_i \cdot d_{\text{AR}}}{2 \cdot E_{\text{FL}}} \cdot \left[ \frac{D_{\text{FL}}^2 \cdot \frac{d_{\text{FL}}^2}{d_{\text{AR}}^2} + d_{\text{FL}}^2}{D_{\text{FL}}^2 - d_{\text{FL}}^2} + \nu_{\text{FL}} \cdot \frac{D_{\text{FL}}^2 \cdot \frac{d_{\text{FL}}^2}{d_{\text{AR}}^2} - d_{\text{FL}}^2}{D_{\text{FL}}^2 - d_{\text{FL}}^2} \right] \quad (5.7)$$

Daraus folgt für die Steifigkeit des Flansches:

$$c_{\text{FL}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot E_{\text{FL}} \cdot b_{\text{FL}}}{\left[ \frac{D_{\text{FL}}^2 \cdot \frac{d_{\text{FL}}^2}{d_{\text{AR}}^2} + d_{\text{FL}}^2}{D_{\text{FL}}^2 - d_{\text{FL}}^2} + \nu_{\text{FL}} \cdot \frac{D_{\text{FL}}^2 \cdot \frac{d_{\text{FL}}^2}{d_{\text{AR}}^2} - d_{\text{FL}}^2}{D_{\text{FL}}^2 - d_{\text{FL}}^2} \right]} \quad (5.8)$$

Unter der Annahme, dass beide stirnseitig miteinander verbundenen Körper durch die Klemmnormalkraft die gleiche Aufweitung  $u_0$  erfahren, ergibt sich am Flansch das folgende Kräftegleichgewicht in radialer Richtung:

$$\Delta F_{\text{R}} = c_{\text{FL}} \cdot u_0 \quad (5.9)$$

Und für das radiale Kräftegleichgewicht am Freilaufaußenring gilt entsprechend:

$$\Delta F_{\text{R}} = F_{\text{NK}} - c_{\text{AR}} \cdot u_0 \quad (5.10)$$

Hieraus ergibt sich für das Kräfteverhältnis  $\frac{\Delta F_{\text{R}}}{F_{\text{NK}}}$  folgender Zusammenhang:

$$\frac{\Delta F_{\text{R}}}{F_{\text{NK}}} = \frac{c_{\text{FL}}}{c_{\text{FL}} + c_{\text{AR}}} \quad (5.11)$$

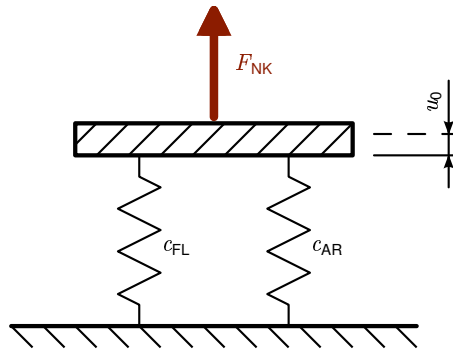


Abb. 5.16: Parallelschaltung zweier Federn

Die Annahme, dass beide Körper die gleiche Aufweitung durch die Klemmnormalkraft  $F_{NK}$  erfahren, entspricht einer Parallelschaltung der beiden Steifigkeiten von Freilaufaußenring und Flansch, wie sie in Abb. 5.16 dargestellt ist.

Mit diesem stark vereinfachten Starrkörper-Federnmodell ergeben sich die in Abb. 5.17 gezeigten Kräfteverhältnisse. Es ist sofort ersichtlich, dass die Ergebnisabweichungen sehr groß sind und dieses Modell somit keine sinnvolle Abschätzung der Kräfteverhältnisse bzw. relativen Übertragbarkeiten erlaubt. Auch die Wahl einer anderen Annahme für den Spannungs-Verzerrungszustand (ESZ, EVZ, RSZ) ergibt zwar leicht geänderte Werte für die berechneten Kräfteverhältnisse, sorgt allgemein jedoch nicht für geringere Abweichungen.

Trotzdem sind aus dem Vergleich des generellen Verhaltens der untersuchten Parameterkombinationen (Designpoints) bereits mit diesem einfachen Modell Aussagen über das Verhalten des stirnseitigen Freilauf-Flansch-Verbunds möglich. Betrachtet man, wie sich das über das einfache Federmodell berechnete Kräfteverhältnis innerhalb der Parameterblöcke verhält, so ist zu erkennen, dass die gleiche Tendenz innerhalb der Blöcke erhalten wird wie sie bereits bei den Referenz 2D-FE-Modellen sich ergaben.

Ausgenommen sind hierbei das Verhalten bei steigender Flanschbreite  $b_{FL}$  und fester Einspannung, da bei dem einfachen Federmodell keine Berücksichtigung der Einspannsituation des Flanschs möglich ist. Ebenso geht bei dem einfachen Federmodell die Flanschbreite  $b_{FL}$  linear in die Steifigkeit des Anschlussflansches  $c_{FL}$  ein, so dass hier der Effekt einer Grenzlänge des Anschlussflansches nicht

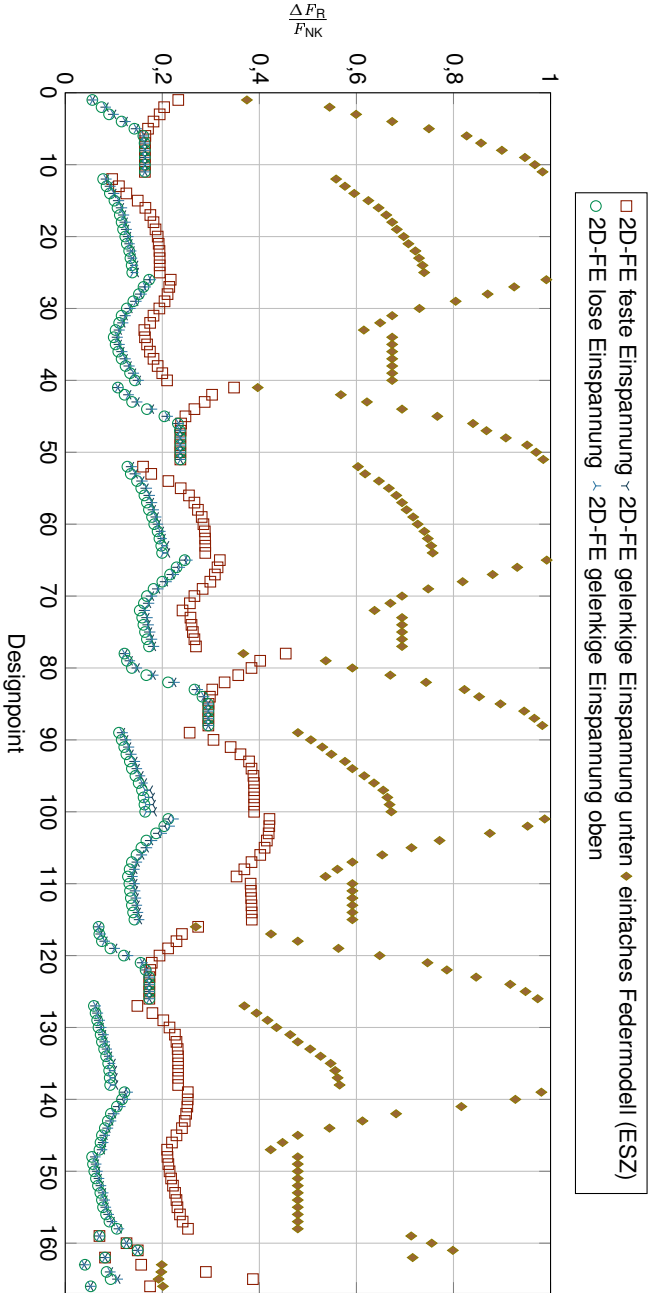


Abb. 5.17: Kräfteverhältnisse als Ergebnis des einfachen Federmodells (Starkkörpermodell) im Vergleich zu den Ergebnissen des vereinfachten 2D-FE-Modells (Referenz) für verschiedene Designpoints

berücksichtigt werden kann. Weiterhin wird die Breite des Klemmbereichs  $b_K$  beim einfachen Federmodell nicht berücksichtigt, weshalb sich für die entsprechenden Blöcke keine Veränderung in Abhängigkeit des variierten Parameters ergibt.

Dennoch können über die mit dem Federmodell mögliche analytische Formulierung eines Zusammenhangs zwischen den geometrischen Größen am stirnseitig befestigten Freilauf bereits erste Aussagen für eine Maximierung der relativen Übertragbarkeit getroffen werden:

- Der Anschlussflansch sollte in radialer Richtung möglichst weich ausgeführt werden. Um eine geringe Flanschsteifigkeit  $c_{FL}$  in Gleichung (5.8) zu erreichen, kann zum einen eine kurze Flanschbreite  $b_{FL}$  gewählt werden, wobei hierbei der Einfluss der Anbindung des Anschlussflanschs an die weitere Umgebungssituation zu berücksichtigen ist. Und zum anderen kann ein möglichst geringer Unterschied zwischen dem Innen- und Außendurchmesser des Flanschs angestrebt werden. Beides deckt sich mit den bisherigen Beobachtungen.
- Das Verhältnis von radialer Steifigkeit des Flanschs  $c_{FL}$  zur Steifigkeit des Freilaufaußenrings  $c_{AR}$  hat einen Einfluss auf das sich ausbildende Kräfteverhältnis  $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$ . Je steifer der Freilaufaußenring im Verhältnis zum Flansch ausgeführt ist, desto geringer ist die zu erwartende radiale Zusatzkraft.

### 5.3 Kombiniertes Kreisring-Schalenmodell

Eine deutlich genauere Möglichkeit, das Kräfteverhältnis abzuschätzen, stellt das sogenannte kombinierte Kreisring-Schalenmodell dar. Dieses beschreibt den stirnseitig befestigten Freilauf als einen Verbund von stirnseitig miteinander verbundenen kurzen Zylinderschalen, erweitert um eine schmale Kreisringscheibe am Querschnittsübergang zwischen Freilaufaußenring und Flansch. Dem Modell liegt der in Abb. 5.18 dargestellte Aufbau zugrunde.

Der Freilaufaußenring wird über die Klemmbreite  $b_K$  mit dem äquivalenten Innendruck  $p_K$  belastet. Über den Innendruck wird eine für die Berechnung erforderliche rotationssymmetrische Belastung dargestellt und der Innendruck entspricht hierbei der Summe der auf die Klemmfläche des Freilaufaußenrings bezogenen Klemm-



normalkräfte  $F_{\text{NK}}$ . Es gilt demnach ähnlich zu Gleichung (5.1):

$$p_K = \frac{F_{\text{NK}}}{\pi \cdot d_{\text{AR}} \cdot b_K} \quad (5.12)$$

Alternativ können die Klemmnormalkräfte auch auf die Schalenmittelfläche<sup>10</sup>  $d_{\text{S,AR}}$  bezogen werden. Dies liegt zwar näher an den Vorstellungen der Schalentheorie, ist aber in diesem Fall weiter von den realen Verhältnissen (Kraftangriff am Innendurchmesser  $d_{\text{AR}}$ ) entfernt. Ebenso zeigte sich, dass mit dem realen Kraftangriff nach Gleichung (5.12) eine höhere Genauigkeit in der Abschätzung der entstehenden Zusatzkräfte  $\Delta F_{\text{R}}$  möglich ist.

Jede Unstetigkeit in der Belastung oder der Geometrie ruft eine Störung des Membranspannungszustands an den Zylinderschalen hervor und muss über den Biegespannungszustand der Zylinderschale berücksichtigt werden.

Durch die Unstetigkeiten in der äußeren Belastung, infolge des nur über die Klemmbreite  $b_K$  angreifenden Innendrucks  $p_K$ , muss folglich der Freilaufaußenring an den Stellen  $z_2$  und  $z_3$  in die drei Körper ①, ② und ③ (jeweils kurze Zylinderschalen) aufgeteilt werden.

Weiterhin ist das System aus stirnseitig miteinander verbundenem Freilaufaußenring und Flansch an der Stelle  $z_1$  infolge des unstetigen Querschnittverlaufs nochmals zu teilen, woraus sich der weitere Körper ④ ergibt.

Am linken Rand bei  $z_0$  wird die Einspannsituation des Verbunds aus stirnseitig miteinander verbundenem Freilaufaußenring und Flansch als Lagerung berücksichtigt. Hierbei sind die folgenden Lagerungen (Einspannungen) möglich:

- Ⓐ stellt eine reine Führung dar. Diese Art der Einspannung nimmt keine radialen Randlasten, wie Radialkräfte und Biegemomente, auf und ruft deshalb keinen Biegespannungszustand an der Einspannstelle hervor. Aus diesem Grund wird sie auch als „Membranlagerung“ bezeichnet.
- Ⓑ ist gleichbedeutend mit einer gelenkigen Lagerung. Das bedeutet, dass durch die Einspannung zwar eine Radialkraft als Randlast wirkt, jedoch kein Einspannmoment. Diese Art der Lagerung stellt eine biegeeweiche Einspannung dar, die zwar die Verschiebung des Körpers in radialer Richtung verhindert, nicht jedoch seine Verdrehung am Einspannpunkt.

<sup>10</sup>Der Schalenmitteldurchmesser beträgt  $d_{\text{S,AR}} = \frac{D_{\text{AR}} + d_{\text{AR}}}{2}$ .

- Ⓒ bedeutet eine feste Einspannung. Diese Art der Lagerung behindert sowohl die Radialverschiebung als auch die Verdrehung am Einspannort, was wiederum sowohl eine Radialkraft als auch ein Einspannmoment als Randlasten nach sich zieht.

Weiterhin ist es auch möglich eine entsprechende Einspannung am rechten Rand bei  $z_4$  zu berücksichtigen.

In realen technischen Systemen ist eine unendlich biegesteife Einspannung so gut wie unmöglich, ebenso ist jedoch beim stirnseitig befestigten Freilauf eine Membranlagerung in der Praxis kaum bzw. nur unter erheblichem technischen Aufwand umsetzbar. Aus diesen Überlegungen scheint aus den zur Verfügung stehenden Einspannungen eine gelenkige Lagerung (Ⓑ) in der Regel die beste Wahl für eine Abschätzung der entstehenden Zusatzkräfte zu sein.<sup>11</sup>

### 5.3.1 Kraftgrößenverfahren am Schalen-Scheibenmodell

Wie bereits kurz beschrieben, wird der Biegespannungszustand an den Körpern über sogenannte Randstörungen berücksichtigt, indem an den Verbindungsstellen zwischen den Körpern Randkräfte und Randmomente als statisch unbestimmte Kräfte angesetzt werden. Diese unbekannten Kräfte und Momente können über das sogenannte *Kraftgrößenverfahren* (auch bekannt als *Prinzip der virtuellen Verschiebungen* oder *Prinzip der virtuellen Arbeit*) bestimmt werden.

Abb. 5.19 zeigt den in die vier Einzelkörper zerlegten, stirnseitigen Freilauf-Flansch-Verbund aus Abb. 5.18. Die Geometrie der Einzelkörper wird jeweils über ihren Innen- und Außendurchmesser sowie ihre Breite bzw. axiale Länge beschrieben. Die Körper (1), (2) und (3) ergeben sich aus dem Freilaufaußenring, weshalb sie alle den Innendurchmesser  $d_{AR}$  und den Außendurchmesser  $D_{AR}$  erhalten. Die Breite des Körpers (2) entspricht der Klemmbreite  $b_K$ , also der Breite des Klemmbereichs bzw. der Klemmelemente. Die Breite des Körpers (3) beträgt  $z_r$  und entspricht dem Abstand des Klemmbereichs von der stirnseitigen Befestigung. Dementsprechend beträgt die Breite des Körpers (1)

$$z_v = b_{AR} - b_K - z_r \quad . \quad (5.13)$$

<sup>11</sup>In realen Systemen wird sich wohl eine Mischung aus den Lagerungsbedingungen (Ⓑ) und (Ⓒ) ergeben.





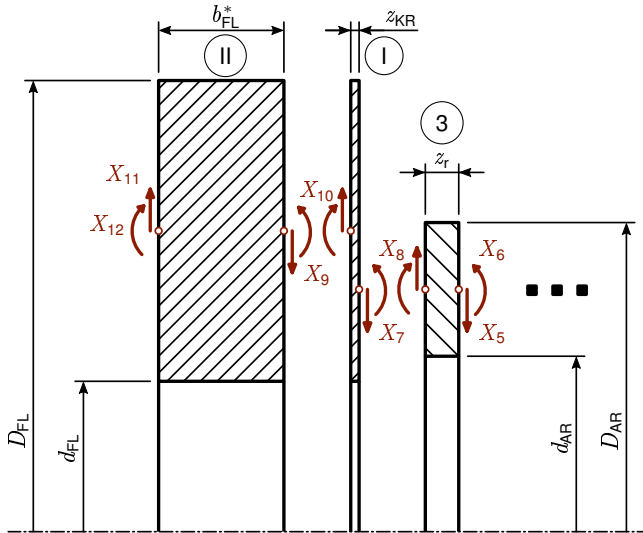


Abb. 5.20: Schalen-Kreisring-Scheibenmodell des stirnseitig befestigten Freilaufs mit statisch unbestimmten Schnittlasten

### 5.3.2 Erweiterung des Schalen-Scheibenmodells um eine Kreisringscheibe

Die unterschiedlichen Kraftangriffsradien können jedoch über die Eigenschaften einer dünnen Kreisringscheibe (vergleiche Abschnitt 3.4) berücksichtigt werden. Hierzu wird der Körper (4), wie in Abb. 5.20 dargestellt, in zwei weitere Körper (I) und (II) aufgeteilt. Die Kreisringscheibe (I) weist hierbei den Innen- und Außendurchmesser des Flanschkörpers auf. Einzig die Breite des Schalenkörpers (II) verringert sich um die Dicke  $z_{KR}$  der Kreisringscheibe auf:

$$b_{FL}^* = b_{FL} - z_{KR} \quad (5.15)$$

Da die Kreisringscheibe andere Eigenschaften besitzt als die kurzen Zylinderschalen<sup>12</sup>, sollte die Dicke der Kreisringscheibe hierbei möglichst gering gewählt werden. Für die Praxis empfiehlt sich eine Dicke bzw. Breite von  $z_{KR} = 0,1 \text{ mm}$ .

Abb. 5.21 zeigt eine Kreisringscheibe, welche rotationssymmetrisch durch die sta-

<sup>12</sup>Unter anderem wird ein Abklingen der Randstörungen über die axiale Länge nicht berücksichtigt.

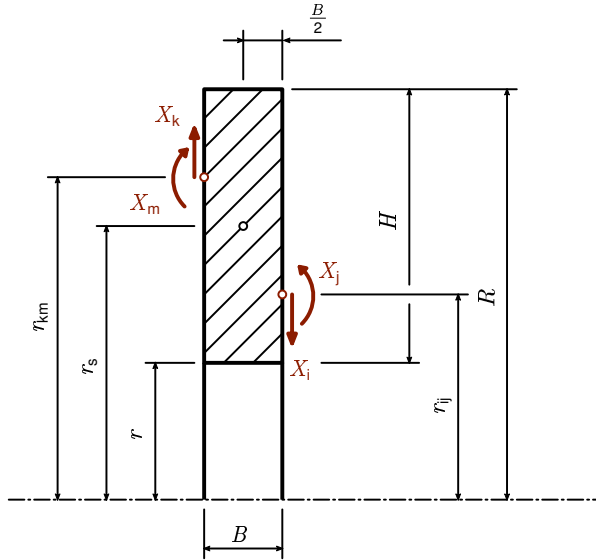


Abb. 5.21: Kreisringscheibe mit statisch unbestimmten Schnittlasten unter rotationssymmetrischer Belastung

tisch unbestimmten Radialkräfte  $X_i$  und  $X_k$  sowie die unbestimmten Krepelmomente  $X_j$  und  $X_m$  belastet wird. Die Randbelastungen  $X$  am rechten und am linken Rand eines Einzelkörpers des Scheibenmodells sind immer entgegengesetzt anzunehmen. Dies ist schon allein aus Gründen der statischen Bestimmtheit der Einzelkörper erforderlich bzw. sinnvoll.

Die Radialkraft  $X_i$  und das Moment  $X_j$  greifen hierbei am Radius  $r_{ij}$  an, während der Radius  $r_{km}$  den mittleren Angriffsort der Kraft  $X_k$  und des Moments  $X_m$  beschreibt. Der Radius  $r_s$  beschreibt den Schwerpunkt des rotationssymmetrischen Kreisringquerschnitts. Für einen Kreisring mit dem Außendurchmesser  $2 \cdot R$  und dem Innendurchmesser  $2 \cdot r$  ergibt sich der Schwerpunktradius  $r_s$  als Mittelwert von  $R$  und  $r$ . Die Höhe  $H$  der Kreisringscheibe ergibt sich aus der Differenz der Radien des Außen- und Innendurchmessers. Es gilt folglich:

$$r_s = \frac{R + r}{2} \quad (5.16)$$

$$H = R - r \quad (5.17)$$

Die Breite  $B$  der Kreistringscheibe sollte gegenüber der Höhe  $H$  klein sein. Demnach sollte die Breite  $B$  einer Kreistringscheibe des Scheibenmodells so gewählt werden, dass gilt

$$B \leq H \quad . \quad (5.18)$$

Diese Forderung wird mit  $z_{KR} = 0,1 \text{ mm}$  für alle in der Praxis relevanten Fälle erfüllt.

### 5.3.3 Aufstellen der Formänderungsmatrix am Beispiel einer Kreistringscheibe

Für die Nutzung des Kraftgrößenverfahrens sind an den einzelnen Körpern die Formänderungswerte  $\delta_{pq}$  zu bestimmen. Der zweite Index  $q$  steht hierbei für die Ursache der Verformung und der erste Index  $p$  steht für den betrachteten Ort der Formänderung. Hierbei sind im ersten Index  $p$  die drei Informationen des Orts, der Art und der positiven Richtung der Verformung enthalten. Es gilt:

- Ist  $X_p$  eine Kraft, so stellt  $\delta_{pq}$  die Verschiebung an der Stelle  $p$  infolge der Last  $X_q$  in Richtung von  $X_p$  dar.
- Ist  $X_p$  ein Moment, so stellt  $\delta_{pq}$  die Verdrehung an der Stelle  $p$  infolge der Last  $X_q$  in Richtung von  $X_p$  dar.

Für die in Abb. 5.21 dargestellte Kreistringscheibe ergeben sich demnach nach [HM01] die folgenden Formänderungswerte, wobei das Vorgehen zur Bestimmung der Formänderungswerte bei den ersten Werten noch ausführlich beschrieben werden soll.

- $\delta_{ii}^*$  ist die Verschiebung des Angriffspunkts von  $X_i$  infolge der nach innen gerichteten Kraft  $X_i$ . Die Verschiebung des rechten Rands infolge der nach innen gerichteten Kraft  $X_i$  findet natürlich ebenfalls nach innen, also in Richtung von  $X_i$  statt. Der Formänderungswert  $\delta_{ii}^*$  ist demnach positiv. Die Formänderung infolge einer Randkraft, welche am Radius  $r_{ij}$  angreift, beträgt:

$$\delta_{ii}^* = \frac{4 \cdot r_s \cdot r_{ij}}{E \cdot H \cdot B} \quad (5.19)$$

- $\delta_{ij}^*$  ist die Verschiebung des Angriffspunkts von  $X_i$  infolge des Randmoments  $X_j$ . Für die Belastung mit einem rechtsdrehenden Moment, welches am Ra-

dius  $r_{ij}$  angreift, ergibt sich in diesem Fall eine Verschiebung des rechten Rands nach außen. Die Formänderung findet also entgegen der positiven Richtung der Kraft  $X_i$  statt, weshalb der Formänderungswert  $\delta_{ij}^*$  negativ anzusetzen ist. Die Formänderung beträgt:

$$\delta_{ij}^* = -\frac{6 \cdot r_s \cdot r_{ij}}{E \cdot H \cdot B^2} \quad (5.20)$$

- $\delta_{ik}^*$  ist die Verschiebung des Angriffspunkts von  $X_i$  infolge der nach außen gerichteten Kraft  $X_k$ , welche am gegenüberliegenden Rand von  $X_i$  und am Radius  $r_{km}$  angreift. Die Verschiebung durch eine nach außen gerichtete Kraft findet an dem der Krafteinleitung gegenüber gelegenen Rand nach innen statt. In diesem Fall wird der Kreisring also am Angriffspunkt von  $X_i$  infolge der Kraft  $X_k$  nach innen, also in Richtung von  $X_i$  verformt. Der Formänderungswert  $\delta_{ik}^*$  ist demnach positiv und beträgt:

$$\delta_{ik}^* = \frac{2 \cdot r_s \cdot r_{km}}{E \cdot H \cdot B} \quad (5.21)$$

- $\delta_{im}^*$  stellt die Verdrehung des Angriffspunkts von  $X_i$  infolge des Moments  $X_m$  dar. Für die Belastung mit dem linksdrehenden Moment, welches an  $r_{km}$  angreift, ergibt sich in diesem Fall am gegenüberliegenden Rand eine nach innen gerichtete Verschiebung. Die Formänderung findet also in Richtung der Kraft  $X_i$  statt, weshalb die Formänderung positiv ist. Der Formänderungswert beträgt:

$$\delta_{im}^* = \frac{6 \cdot r_s \cdot r_{km}}{E \cdot H \cdot B^2} \quad (5.22)$$

- $\delta_{ji}^*$  ist die Verdrehung am Angriffspunkt des Moments  $X_j$  infolge der Radialkraft  $X_i$ , welche auf der selben Seite der Scheibe und am selben Radius  $r_{ij}$  angreift. Das Drehmoment um den Schwerpunkt infolge der Kraft  $X_i$  ist linksdrehend und somit findet auch die daraus resultierende Verdrehung linksdrehend statt. Diese ist dem rechtsdrehenden Moment  $X_j$  entgegen gerichtet, weshalb der zugehörige Formänderungswert ein negatives Vorzeichen erhält. Die Formänderung beträgt in diesem Fall:

$$\delta_{ji}^* = -\frac{6 \cdot r_s \cdot r_{ij}}{E \cdot H \cdot B^2} \quad (5.23)$$

- $\delta_{jj}^*$  ist die Verdrehung am Angriffspunkt des Moments  $X_j$  infolge des Moments

$X_j$  selbst. Die Verdrehung durch das Moment  $X_j$  erfolgt natürlich in Richtung des Moments  $X_j$ , weshalb der Formänderungswert positiv anzusetzen ist. Für diesen Fall gilt:

$$\delta_{jj}^* = \frac{12 \cdot r_s \cdot r_{ij}}{E \cdot H \cdot B^3} \quad (5.24)$$

- $\delta_{jk}^*$  ist die Verdrehung am Angriffspunkt des Moments  $X_j$  infolge der Radialkraft  $X_k$ , welche auf der gegenüberliegenden Seite der Scheibe und am Radius  $r_{km}$  angreift. Das Drehmoment um den Schwerpunkt infolge der Kraft  $X_k$  ist linksdrehend und somit ist die daraus resultierende Verdrehung ebenfalls linksdrehend. Diese ist dem rechtsdrehenden Moment  $X_j$  entgegen gerichtet, weshalb der zugehörige Formänderungswert wieder ein negatives Vorzeichen erhält. Die Formänderung beträgt:

$$\delta_{jk}^* = -\frac{6 \cdot r_s \cdot r_{km}}{E \cdot H \cdot B^2} \quad (5.25)$$

- $\delta_{jm}^*$  ist die Verdrehung am Angriffspunkt des Moments  $X_j$  infolge des Moments  $X_m$ , welches am Radius  $r_{km}$  angreift. Das Moment  $X_m$  ist linksdrehend, während das Moment  $X_j$  rechtsdrehend ist. Dementsprechend ist auch die infolge des Moments  $X_m$  entstehende Verdrehung der positiven Drehrichtung von  $X_j$  entgegen gerichtet und der Formänderungswert ist negativ. Für diesen Fall ergibt sich:

$$\delta_{jm}^* = -\frac{12 \cdot r_s \cdot r_{km}}{E \cdot H \cdot B^3} \quad (5.26)$$

Die weiteren Formänderungswerte ergeben sich aus analogen Überlegungen und können in einer Elastizitätsmatrix des Einzelkörpers, in diesem Fall einer Kreisring-scheibe  $\underline{\underline{\delta_n^*}}$ , zusammengefasst werden.

$$\underline{\underline{\delta_n^*}} = \begin{bmatrix} \delta_{ii}^* & \delta_{ij}^* & \delta_{ik}^* & \delta_{im}^* \\ \delta_{ji}^* & \delta_{jj}^* & \delta_{jk}^* & \delta_{jm}^* \\ \delta_{ki}^* & \delta_{kj}^* & \delta_{kk}^* & \delta_{km}^* \\ \delta_{mi}^* & \delta_{mj}^* & \delta_{mk}^* & \delta_{mm}^* \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$= \frac{r_s}{E \cdot H} \cdot \begin{bmatrix} \frac{4 \cdot r_{ij}}{B} & -\frac{6 \cdot r_{ij}}{B^2} & \frac{2 \cdot r_{km}}{B} & \frac{6 \cdot r_{km}}{B^2} \\ -\frac{6 \cdot r_{ij}}{B^2} & \frac{12 \cdot r_{ij}}{B^3} & -\frac{6 \cdot r_{km}}{B^2} & -\frac{12 \cdot r_{km}}{B^3} \\ \frac{2 \cdot r_{ij}}{B} & -\frac{6 \cdot r_{ij}}{B^2} & \frac{4 \cdot r_{km}}{B} & \frac{6 \cdot r_{km}}{B^2} \\ \frac{6 \cdot r_{ij}}{B^2} & -\frac{12 \cdot r_{ij}}{B^3} & \frac{6 \cdot r_{km}}{B^2} & \frac{12 \cdot r_{km}}{B^3} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Werden die Formänderungswerte nach [HM01] für einen Einzelkörper als kurze (dünnwandige) Zylinderschalen mit Randlasten berechnet, so ergibt sich die folgende Elastizitätsmatrix  $\underline{\underline{\delta}}_n$ :

$$\underline{\underline{\delta}}_n = \begin{bmatrix} \delta_{ij} & \delta_{ij} & \delta_{ik} & \delta_{im} \\ \delta_{ji} & \delta_{jj} & \delta_{jk} & \delta_{jm} \\ \delta_{ki} & \delta_{kj} & \delta_{kk} & \delta_{km} \\ \delta_{mi} & \delta_{mj} & \delta_{mk} & \delta_{mm} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

$$= \frac{1}{K \cdot \lambda} \cdot \begin{bmatrix} \frac{H_1}{2 \cdot \lambda^2} & -\frac{H_3}{2 \cdot \lambda} & \frac{H_2}{2 \cdot \lambda^2} & \frac{H_4}{\lambda} \\ -\frac{H_3}{2 \cdot \lambda} & H_5 & -\frac{H_4}{\lambda} & -H_6 \\ \frac{H_2}{2 \cdot \lambda^2} & -\frac{H_4}{\lambda} & \frac{H_1}{2 \cdot \lambda^2} & \frac{H_3}{2 \cdot \lambda} \\ \frac{H_4}{\lambda} & -H_6 & \frac{H_3}{2 \cdot \lambda} & H_5 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Hierbei bezeichnen  $K$  die Biegesteifigkeit und  $\lambda$  den Kehrwert der charakteristischen Länge der Zylinderschale (siehe Abschnitt 3.5). Die Werte der Hilfsfunktionen  $H_1$  bis  $H_6$  gelten jeweils für die Länge des entsprechenden Einzelkörpers  $B$ .<sup>13</sup>

### 5.3.4 Aufbau der Gesamtelastizitätsmatrix

Die Elastizitätsmatrizen der Einzelkörper werden in der Gesamtelastizitätsmatrix  $\underline{\underline{\delta}}$  zusammengefasst. Diese besitzt für das in Abb. 5.19 und Abb. 5.20 dargestellte kombinierte Kreisring-Schalenmodell den in Abb. 5.22 gezeigten Aufbau.

Es ist zu erkennen, dass die Gesamtelastizitätsmatrix  $\underline{\underline{\delta}}$  aus den Elastizitätsmatrizen der Einzelkörper aufgebaut wird, indem diese in der Reihenfolge der Einzelkörper (von rechts nach links) entlang der Hauptdiagonalen additiv eingefügt werden. Die Bezeichnung<sup>14</sup> der einzelnen Komponenten der Gesamtelastizitätsmatrix ist folgendermaßen zu lesen:

$\delta_{i,j}^k$  bezeichnet die durch die zu bestimmende Unbekannte  $j$  am Kraftangriffsort der Unbekannten  $i$  hervorgerufene Verformung (wie bereits in Kapitel 5.3.3 beschrieben) des Körpers  $k$ .

$\delta_{i,j}^{k,m}$  bezeichnet wiederum die durch die zu bestimmende Unbekannte  $j$  am Kraft-

<sup>13</sup>z.B.  $H_1 \triangleq H_1(\lambda \cdot B)$

<sup>14</sup>Die Kommata in der Bezeichnung der Komponenten dienen allein der Trennung der Variablen und haben keine weitere Bedeutung.

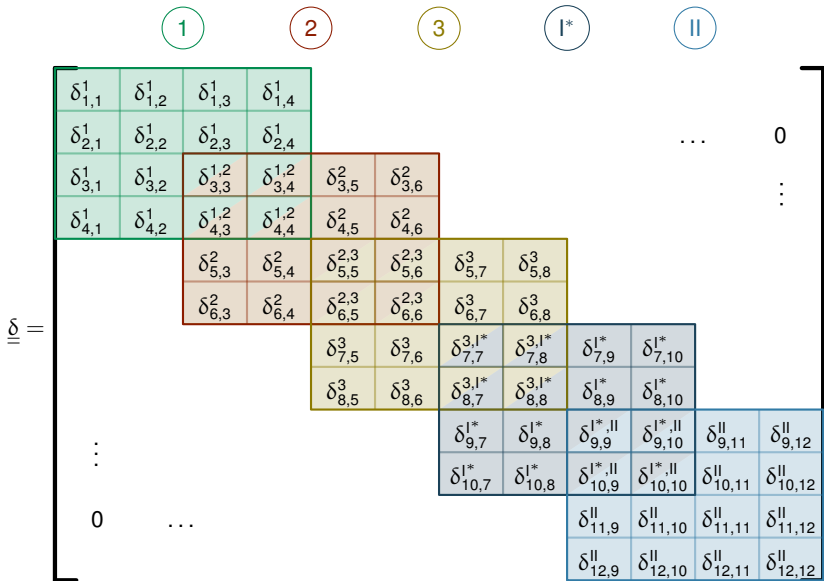


Abb. 5.22: Aufbau der Gesamtelastizitätsmatrix für das Schalen-Kreisring-Scheibenmodell aus Abb. 5.20



angriffsort der Unbekannten  $i$  hervorgerufene Verformung. In diesem Fall werden jedoch die Verformungen der beiden benachbarten Körper  $k$  und  $m$  miteinander addiert. Es gilt demnach:

$$\delta_{i,j}^{k,m} = \delta_{i,j}^k + \delta_{i,j}^m \quad (5.31)$$

Dies trägt anschaulich dem Umstand Rechnung, dass zwischen den benachbarten Körpern  $k$  und  $m$  die Unbekannten  $(X_i, X_j)$  jeweils als Kräfte- bzw. Momentenpaar einmal am linken Rand des rechten Körpers und einmal am rechten Rand des linken Körpers angreifen.

### 5.3.5 Aufbau des LGS für das Kraftgrößenverfahren

Nachdem nun die Elastizitätsmatrix für das System des stirnseitig befestigten Freilaufs aufgestellt ist, kann das vollständige lineare Gleichungssystem (LGS) für die Berechnung der unbekannten Schnittlasten und damit auch der gesuchten radialen Zusatzkraft  $\Delta F_R$  aufgestellt werden.

Hierzu ist nun noch der Vektor der lastabhängigen Verformungen  $\underline{\delta}_0$  aufzustellen. Betrachtet man das Schalen-Scheibenmodell in Abb. 5.19, so ist zu erkennen, dass nur der Körper ② eine äußere Belastung infolge der Klemmnormalkräfte bzw. des äquivalenten Innendruckes  $p_K$  nach Gleichung (5.12) erfährt. Diese isolierte Belastung kann über den Membranspannungszustand berücksichtigt werden. Da es sich bei den untersuchten Freilauf-Flansch-Verbindungen in der Regel um dickwandige Hohlzylinder handelt, sollte die Membranverformung nach ROSEMEIER [Ros73] (vergleiche Abschnitt 3.5.6) durch die *Kesselformel für dickwandige Behälter*, welche auch als LAMÉ-Gleichungen bekannt sind, abgeschätzt werden. ROSEMEIER schlägt hierfür in [Ros73] die folgende Formel (Gleichung (5.32)) vor. Nach dieser gilt für die Radialverschiebung dieses Teilkörpers infolge des Innendruckes  $p_K$ :

$$u_0(r) = \frac{p_K}{E} \cdot \frac{d_{AR}^2}{D_{AR}^2 - d_{AR}^2} \cdot \left[ (1 - \nu_{AR}) + (1 + \nu_{AR}) \cdot \frac{D_{AR}^2}{4 \cdot r^2} \right] \cdot r \quad (5.32)$$

Diese Gleichung entspricht der Radialverschiebung in Gleichung (5.2) für einen angenommenen ebenen Spannungszustand (ESZ).

Es zeigte sich, dass mit der Annahme des von GRÜNENDICK in [Grü05] als ro-

tationssymmetrischer Spannungszustand (RSZ) bezeichneten Zustands für den Membranzustand des Freilaufaußenrings die geringsten absoluten Abweichungen zu den Ergebnissen des 2D-FE-Referenzmodells erreicht wurden. Die Abweichungen mit der Berechnung über den RSZ führten jedoch sowohl zur Über- als auch zur Unterschätzung der berechneten Kräfteverhältnisse gegenüber den Ergebnissen des 2D-FE-Referenzmodells. Die Berechnung der Radialverschiebung unter der Annahme des ESZ liefert zwar im Vergleich zur Berechnung mit dem RSZ teilweise größere Abweichungen, jedoch drücken sich die Abweichungen fast ausschließlich in Form einer Überschätzung der entstehenden radialen Zusatzkräfte  $\Delta F_R$  aus. Dies entspricht einer konservativen Abschätzung und stellt eine dem Berechnungsverfahren innewohnende zusätzliche Sicherheit dar.

Weiterhin wird in [Ros73] vorgeschlagen, die Aufweitung für den Radius der Schalenmittelfläche ( $r = r_S$ ) zu berechnen. Dies liegt bei der Berechnung der stirnseitig miteinander Körper des Freilaufaußenrings und des Anschlussflanschs als (dicke) Schalen natürlich nahe. Die Berechnung der Radialverschiebung  $u_0$  für den Innendurchmesser  $d_{AR}$  bzw. den zugehörigen Radius liefert jedoch bessere Übereinstimmungen zwischen den mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneten Kräfteverhältnissen  $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$  und den Ergebnissen des 2D-FE-Referenzmodells, da der Innendurchmesser des Freilaufaußenrings auch den realen Kraftangriffsort darstellt.

Dementsprechend wird empfohlen, die Radialverschiebung  $u_0$  des mit dem Klemm-  
innendruck  $p_K$  belasteten Teilkörpers (2) nach folgender Formel zu berechnen:

$$\begin{aligned} u_0 &= u^{ESZ} \left( \frac{d_{AR}}{2} \right) = \\ &= \frac{p_K}{E} \cdot \frac{d_{AR}^2}{D_{AR}^2 - d_{AR}^2} \cdot \left[ (1 - \nu_{AR}) + (1 + \nu_{AR}) \cdot \frac{D_{AR}^2}{d_{AR}^2} \right] \cdot \frac{d_{AR}}{2} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Die der partikulären Lösung entsprechende Radialverschiebung  $u_0$  des von den Klemmkraften aufgeweiteten Körpers (2) kann grundsätzlich nur Einfluss auf die Verformungen der an ebendiesem Körper angreifenden statisch Unbestimmten  $X_3$  bis  $X_6$  haben. Dementsprechend sind alle weiteren Plätze des Vektors der lastabhängigen Verformungen  $\underline{\delta}_0$  mit 0 zu besetzen. Betrachtet man nun die Verformungen in Richtung der unbekannten Randkraft  $X_3$  so ist zu erkennen, dass nur eine Verformung des Körpers (2) auftritt und das die angetragene Randkraft an diesem Körper der aufweitenden Verformung durch den Innendruck entgegen gerich-

tet ist. Demnach ist die dritte Stelle des Vektors  $\underline{\delta}_{30}$  mit dem Wert  $-u_0$  zu besetzen. Da die Belastung mit einem konstanten Innendruck eine Membranverformung für den Körper (2) darstellt, findet keine Verdrehung der Ränder infolge dieser Belastung statt. Dementsprechend gilt für die vierte und sechste Stelle des Vektors  $\underline{\delta}_{40} = \underline{\delta}_{60} = 0$ . Zu guter Letzt bleibt noch die Radialverschiebung des linken Rands zu berücksichtigen, diese findet am Körper (2) in Richtung der in Abb. 5.19 angetragenen Unbekannten statt, weshalb die fünfte Stelle des Vektors  $\underline{\delta}_{50}$  mit dem Wert  $+u_0$  zu besetzen ist.

Je nach Lagerungsbedingung werden die nicht erforderlichen Randlasten und die mit Ihnen verbundenen Formänderungswerte aus dem Gleichungssystem gestrichen. Findet zum Beispiel keine Einspannung bzw. nur eine reine Führung (A) des rechten Rands des Körpers (1) in Abb. 5.18 statt, so werden die ersten beiden Zeilen und Spalten der Gesamtelastizitätsmatrix in Abb. 5.22 mit 0 besetzt und können demnach auch gestrichen werden. Wird weiterhin der Flansch (Körper (4) bzw. (I)) an seinem linken Rand gelenkig eingespannt (Lagerung (B)), so wird die letzte Zeile und Spalte – quasi alle mit dem nun wegfallenden statisch Unbestimmten Randmoment  $X_{12}$  verknüpften Formänderungswerte – der Elastizitätsmatrix ebenfalls gestrichen.

Das lineare Gleichungssystem reduziert sich demnach in diesem Fall um drei Gleichungssätze. Die Elastizitätsmatrix  $\underline{\underline{\delta}}$  reduziert ihre Dimension in diesem Fall z.B. von (12 x 12) auf (9 x 9) und der Vektor der lastabhängigen Verformungen  $\underline{\delta}_0$  entsprechend von (12 x 1) auf (9 x 1).

### 5.3.6 Lösung des linearen Gleichungssystems

Wie bereits in Unterabschnitt 3.3.2 beschrieben, kann der Vektor  $\underline{X}$  der statisch Unbestimmten  $X_i$  über Invertierung der Elastizitätsmatrix und Multiplikation mit dem Vektor der lastabhängigen Verformungen bestimmt werden. Es gilt hierbei der bereits aus Gleichung (3.22) bekannte Zusammenhang:

$$\underline{X} = -\underline{\underline{\delta}}^{-1} \cdot \underline{\delta}_0 \quad (5.34)$$

Wird aus den so berechneten Schnittkräften und -momenten die der radialen Zusatzkraft  $\Delta F_R$  im stirnseitigen Kontakt entsprechende ausgewertet und auf die


dem Klemminnendruck  $p_K$  zugrunde liegende Klemmnormalkraft  $F_{NK}$  bezogen, so ergibt sich das gesuchte Kräfteverhältnis  $\frac{\Delta F_B}{F_{NK}}$  des kombinierten Kreisring-Schalenmodells.

Die Ergebnisse des kombinierten Kreisring-Schalenmodells (kurz: kKS) im Vergleich zu den Ergebnissen des 2D-FE-Referenzmodells sind nachfolgend in den Abb. 5.23 bis 5.26 dargestellt.

Es ist zu erkennen, dass sich mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell das bereits mit dem vereinfachten 2D-FE-Modell beobachtete Verhalten gut reproduzieren lässt. So hat z.B. die Einspannsituation ab dem gleichen Designpoint bzw. der gleichen Flanschbreite  $b_{FL}$  keinen Einfluss mehr auf das sich ergebende Kräfteverhältnis. Die Berechnungen wurden alle mit den Gleichungen für kurze Zylinderschalen nach Unterabschnitt 3.5.4 durchgeführt, da die meisten Körper des stirnseitigen Verbunds den kurzen Zylinderschalen ( $\lambda \cdot B < 4$ ) zuzuordnen sind. Negative Effekte durch numerische Auslöschung (kleine Differenzen großer Zahlen), wie von HAKE in [HM01] beschrieben, konnten auch bei den als „lang“ anzusehenden Parameterkombinationen der untersuchten Designpoints nicht beobachtet werden.

In den Abb. 5.24 bis 5.26 sind die Ergebnisse getrennt für die verschiedenen Lagerungen des Flanschkörpers in Abb. 5.18 dargestellt.<sup>15</sup> In diesen Abbildungen sind ebenfalls die relativen Abweichungen des kombinierten Kreisring-Schalenmodells gegenüber dem Ergebnis des 2D-FE-Referenzmodells für den jeweiligen Designpoint gezeigt.

Die größten Abweichungen ergeben sich hierbei für große Wandstärken des Anschlussflanschs. Den Punkt mit den größten Abweichungen von bis zu 90 % stellt der Designpoint 25 dar. Für diesen Designpoint besitzt der Flanschkörper ein Verhältnis von Wandstärke zu mittlerem Radius  $\left(\frac{H}{r_s}\right)$  von ca. 1,53. Dieser Wert liegt deutlich über der Grenze für die Gültigkeit der „Theorie dünner Schalen“ von 0,2. Wie in Unterabschnitt 3.5.6 beschrieben, ist eine Berechnung nach der Schalentheorie auch bei dicken Schalen möglich und liefert grundsätzlich plausibles Verhalten – wie zu erkennen ist – jedoch ergibt sich ein erhöhter Fehler. Die sich ergebende relative Abweichung ist hierbei für eine feste Einspannung (siehe Abb. 5.24) am größten und nimmt mit „weicher“ werdender Einspannung ab.

<sup>15</sup> Alle Simulationen und Berechnungen wurden für einen ungelagerten bzw. radial geführten Freilaufaußenring (Lagerung ) durchgeführt.

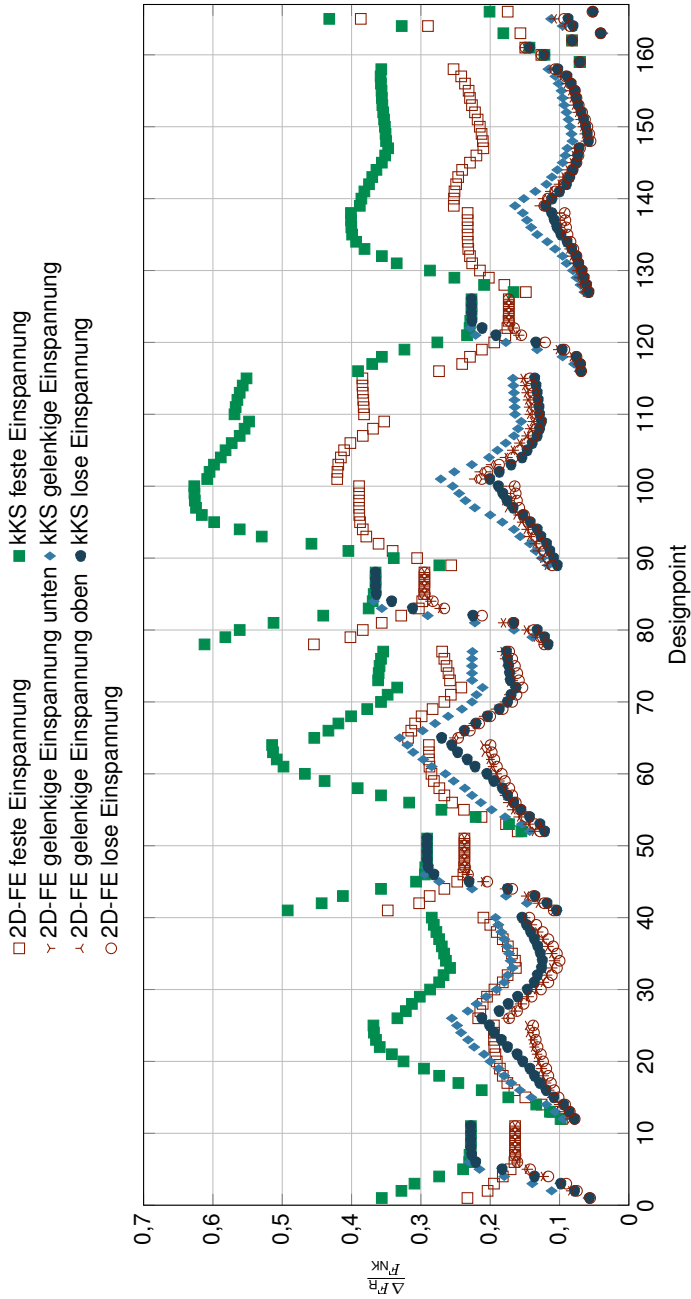


Abb. 5.23: Kräfteverhältnisse  $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$  als Ergebnis des kombinierten Kreisring-Schalenmodells (kKS) im Vergleich zu den Ergebnissen des vereinfachten 2D-FE-Modells (Referenz) für verschiedene Designpoints und Einspannsituationen des Flanschkörpers

Durch die Vernachlässigung der Querkraftverformungen in der Schalentheorie ergeben sich vermutlich die größten Abweichungen zu den Ergebnissen des 2D-FE-Referenzmodells, welches auf Elementebene das elastische Kontinuum abbilden kann. Jedoch ist eine Ableitung analytischer Zusammenhänge auf Grundlage der FEM, welche für das Verständnis der Vorgänge und Einflussfaktoren auf die entstehende radiale Zusatzkraft  $\Delta F_R$  nötig sind, kaum möglich.

Mit den ermittelten Kräfteverhältnissen  $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$  für die verschiedenen Designpoints und Einspannsituationen des Flanschkörpers können nun auch die relativen Übertragbarkeiten  $\beta_R$  nach Gleichung (4.11) berechnet werden. Wird diese Berechnung mit den Ergebnissen aus Abb. 5.24 bis 5.26 und den entsprechenden Lochkreisverhältnissen  $C_D$  der hinter den Designpoints stehenden Freilaufmodelle durchgeführt, so ergeben sich die in Abb. 5.27 bis 5.29 dargestellten Ergebnisse. Die relativen Übertragbarkeiten wurden in diesem Fall vereinfachend für einen angenommenen Klemmwinkel von  $\alpha_K = 3^\circ$  berechnet.

Durch den hyperbolischen Verlauf der relativen Übertragbarkeit  $\beta_R$  über dem Kräfteverhältnis  $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$  (vergleiche z.B. Abb. 4.3) verringern sich die relativen Abweichungen der berechneten Übertragbarkeiten mit den Ergebnissen des kombinierten Kreisring-Schalenmodells gegenüber denen des 2D-FE-Referenzmodells nochmals etwas auf bis zu 47 % bei fester Einspannung des Flanschkörpers.

## 5.4 Bewertung der Methoden

Mit dem einfachen Federmodell aus Abschnitt 5.2 ist eine erste analytische Gleichung aufgestellt worden, mit der sich die Verhältnisse am stirnseitig befestigten Freilauf beschreiben lassen. Durch die starken Vereinfachungen bei der Modellbildung ist jedoch nur eine als äußerst grob anzusehende Abschätzung der infolge der behinderten radialen Aufweitung des Freilaufaußenrings entstehenden radialen Zusatzkräfte und der damit verknüpften relativen Übertragbarkeiten möglich. Das dahinterstehende Modell erlaubt jedoch eine erste anschauliche Beschreibung der zu den radialen Zusatzkräften führenden Mechanismen und wurde deshalb der Vollständigkeit halber in dieser Arbeit mit aufgeführt.

Eine genauere Methode, die radialen Zusatzkräfte auf Basis analytischer Zusammenhänge abzuschätzen, stellt das kombinierte Kreisring-Schalenmodell aus Ab-

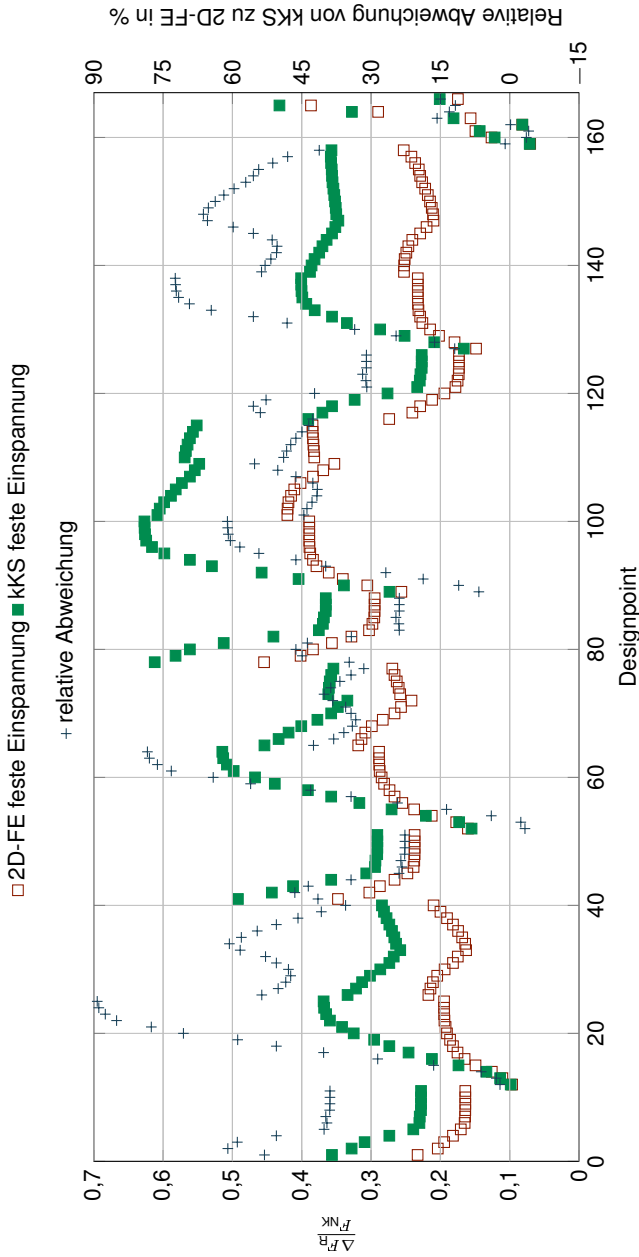


Abb. 5.24: Kräfteverhältnisse  $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$  als Ergebnis des kombinierten Kreising-Schalenmodells (kKS) im Vergleich zu den Ergebnissen des vereinfachten 2D-FE-Modells (Referenz) und relative Abweichung der Ergebnisse des kKS zum Ergebnis des 2D-FE-Referenzmodells für verschiedene Designpoints bei einer festen Einspannung des Anschlussflanschs

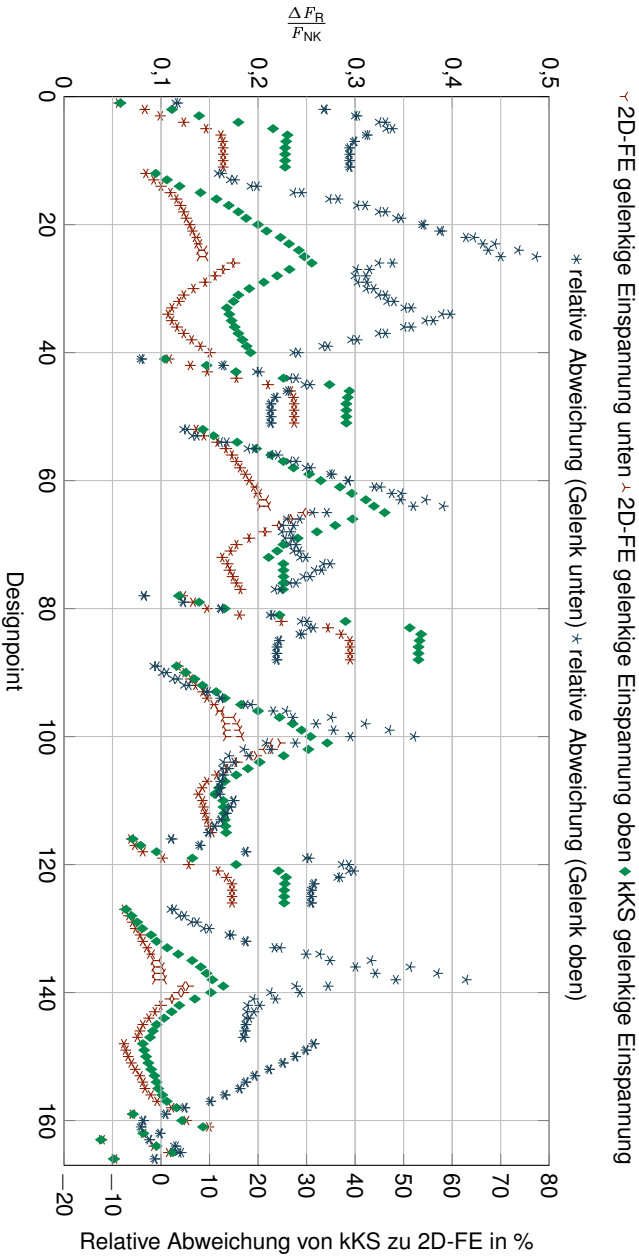


Abb. 5.25: Kräfteverhältnisse  $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$  als Ergebnis des kombinierten Kreisring-Schalenmodells (kKS) im Vergleich zu den Ergebnissen des vereinfachten 2D-FE-Modells (Referenz) und relative Abweichung der Ergebnisse des kKS zum Ergebnis des 2D-FE-Referenzmodells für verschiedene Designpoints bei einer gelenkigen Einspannung des Anschlussflansch



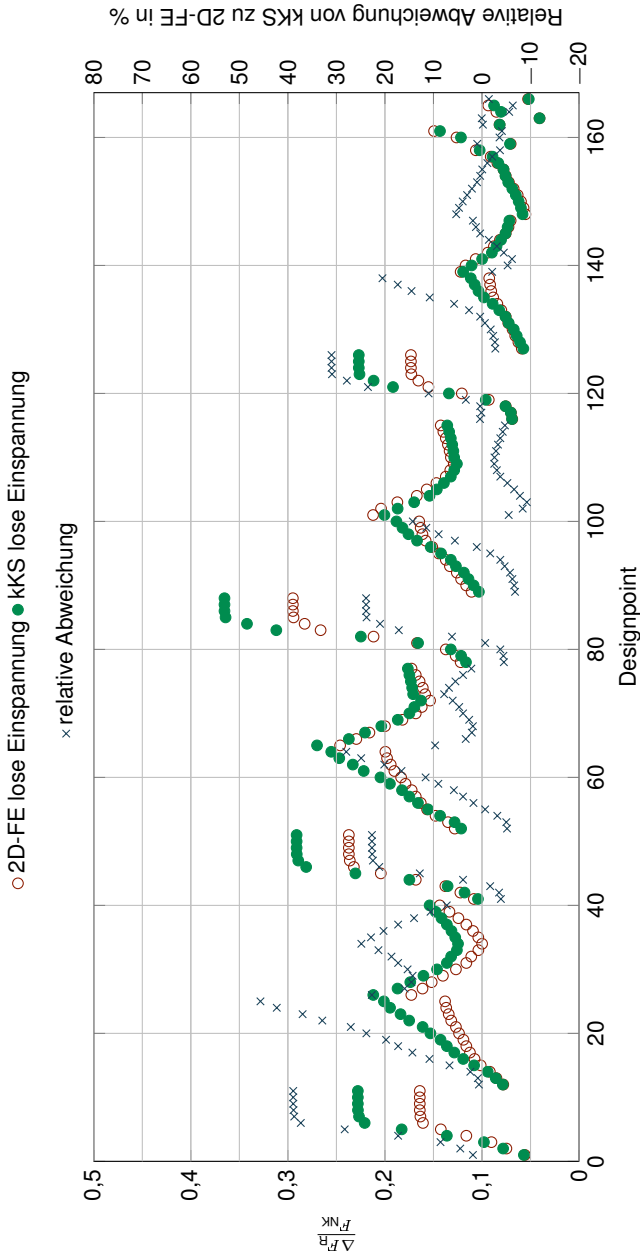


Abb. 5.26: Kräfteverhältnisse  $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$  als Ergebnis des kombinierten Kreising-Schalenmodells (kKS) im Vergleich zu den Ergebnissen des vereinfachten 2D-FE-Modells (Referenz) und relative Abweichung der Ergebnisse des kKS zum Ergebnis des 2D-FE-Referenzmodells für verschiedene Designpoints bei einer losen Führung des Anschlussflanschs

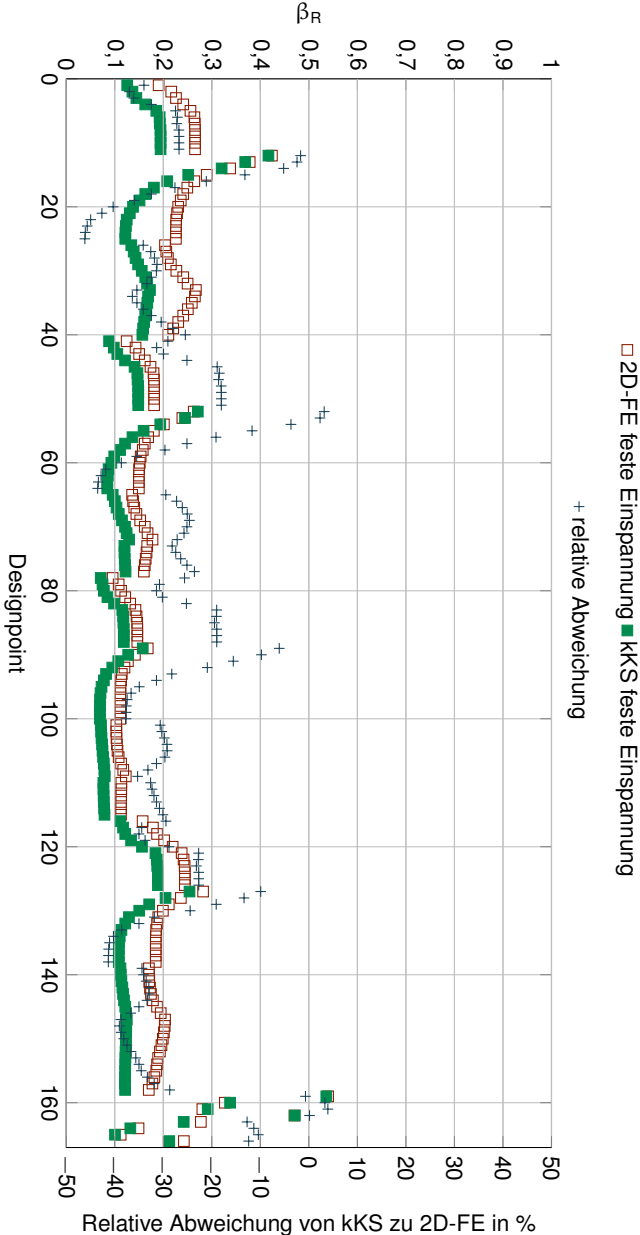


Abb. 5.27: Relative Übertragbarkeit  $\beta_R$  ( $\alpha_k = 3^\circ$ ) als Ergebnis des kombinierten Kreisring-Schalenmodells (kKS) im Vergleich zu den Ergebnissen des vereinfachten 2D-FE-Modells (Referenz) und relative Abweichung der Ergebnisse des kKS zum Ergebnis des 2D-FE-Referenzmodells für verschiedene Designpoints bei einer festen Einspannung des Anschlussflanschs

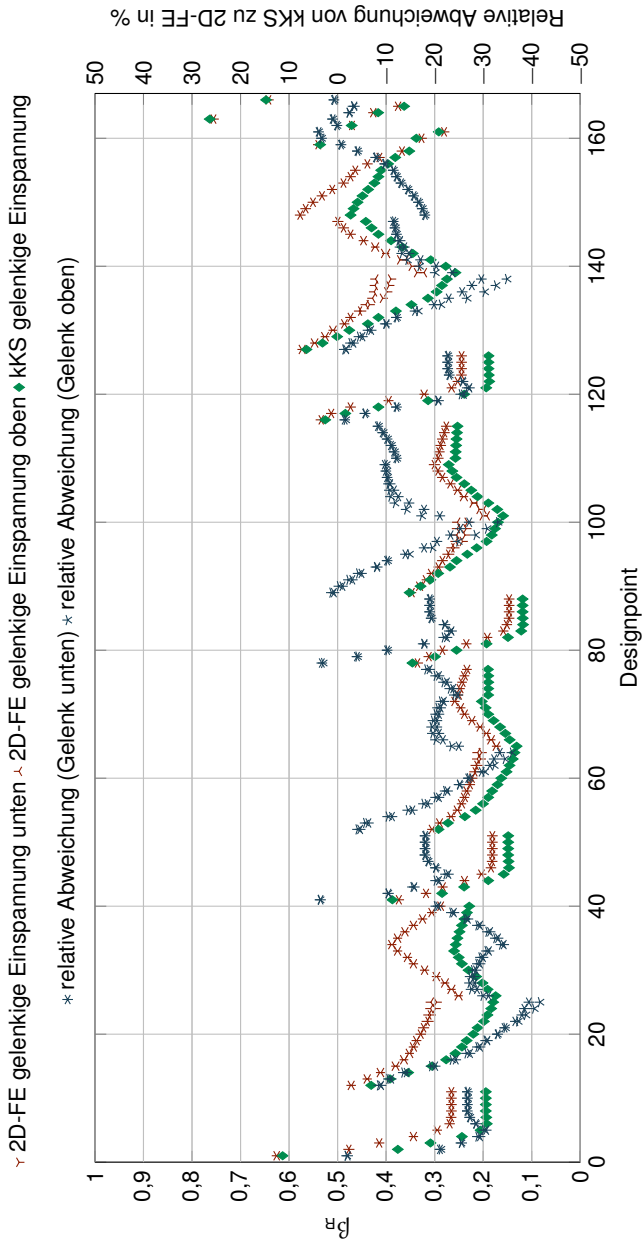


Abb. 5.28: Relative Übertragbarkeiten  $\beta_R (\alpha_K = 3^\circ)$  als Ergebnis des kombinierten Kreisring-Schalenmodells (kKS) im Vergleich zu den Ergebnissen des vereinfachten 2D-FE-Modells (Referenz) und relative Abweichung der Ergebnisse des kKS zum Ergebnis des 2D-FE-Referenzmodells für verschiedene Designpoints bei einer gelenkigen Einspannung des Anschlussflansch

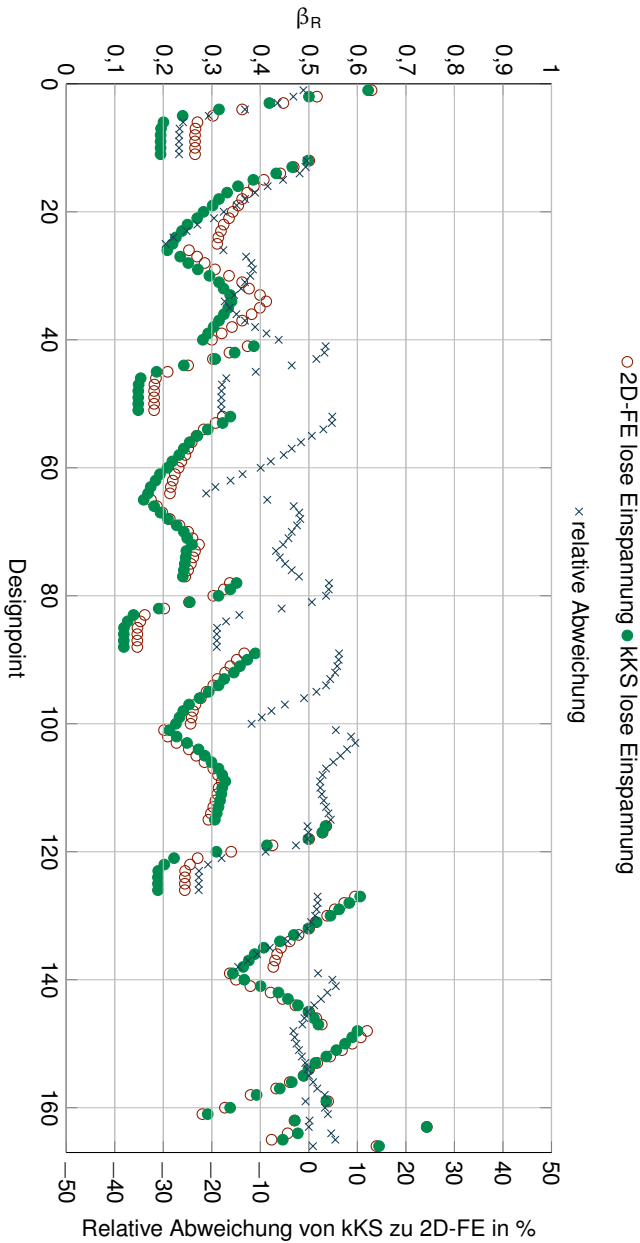


Abb. 5.29: Relative Übertragbarkeiten  $\beta_R(\alpha_k = 3^\circ)$  als Ergebnis des kombinierten Kreisring-Schalenmodells (kKS) im Vergleich zu den Ergebnissen des vereinfachten 2D-FE-Modells (Referenz) und relative Abweichung der Ergebnisse des kKS zum Ergebnis des 2D-FE-Referenzmodells für verschiedene Designpoints bei einer losen Führung des Anschlussflanschs

schnitt 5.3 dar. In diesem wird der stirnseitige befestigte Freilauf auf einen Verbund von Schalenkörpern und Kreisringen zurückgeführt. Mit dieser Modellvorstellung ist eine gute und anschauliche Beschreibung der Mechanismen am stirnseitig befestigten Freilauf möglich. Weisen der Freilaufaußenring und der Anschlussflansch an ihrer Kontaktstelle infolge der angreifenden äußeren Lasten (in diesem Fall die Klemmnormalkräfte  $F_{NK}$ ), welche über den Membranzustand berücksichtigt werden, unterschiedliche Aufweitungen auf, so müssen diese durch zwischen den beiden Körpern wirkende Radialkräfte und Biegemomente zusammengeführt werden, wenn keine Verschiebung zwischen den beiden Körpern geschehen soll. Diese im ersten Moment noch unbestimmten Kräfte und Momente werden über den Biegezustand der Schale berücksichtigt und können über das Kraftgrößenverfahren bestimmt werden.

Eine unterschiedliche Aufweitung bzw. unterschiedliches Aufweitungsvermögen von Freilaufaußenring und Flansch können hierbei durch eine partiell angreifende Last oder eine unterschiedliche radiale Steifigkeit im Kontaktbereich hervorgerufen werden. Die radiale Steifigkeit ist hierbei zum einen von den Geometrieverhältnissen und zum anderen natürlich auch von den Materialkennwerten der Kontaktpartner abhängig.

Das kombinierte Kreisring-Schalenmodell stellt eine Möglichkeit dar, die infolge der durch den Anschlussflansch behinderten radialen Aufweitung entstehenden radialen Zusatzkräfte analytisch und theoretisch sogar „von Hand“ zu berechnen. Praktisch sollte der hinter dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell stehende Berechnungsablauf jedoch in einem Berechnungsprogramm umgesetzt werden. Im Zuge dieser Arbeit wurde dieser in der proprietären Software MATLAB<sup>®</sup> umgesetzt, wobei eine Umsetzung auch in anderen Programmiersprachen und Umgebungen einfach möglich ist.<sup>16</sup>

Durch das Berechnungsprogramm ist eine schnelle Abschätzung der radialen Zusatzkräfte bzw. relativen Übertragbarkeiten möglich. Die Berechnung der Kräfteverhältnisse und relativen Übertragbarkeiten der 167 Designpoints aus Anhang B hat mit MATLAB<sup>®</sup> zum Beispiel keine Sekunde (ca. 0,66 s) gedauert. Für eine schnelle Abschätzung der relativen Übertragbarkeiten und den Vergleich verschiedener Konstruktionsvarianten empfiehlt sich deshalb das kombinierte Kreisring-

<sup>16</sup>MATLAB<sup>®</sup> bietet hierbei jedoch den Vorteil, dass das Programm für die Rechnung mit Matrizen optimiert wurde, wie es für die Berechnung der radialen Zusatzkräfte mit dem Kraftgrößenverfahren z.B. notwendig ist.


Schalenmodell.



Ist eine möglichst genaue Abschätzung der relativen Übertragbarkeit eines stirnseitig befestigten Freilaufs erforderlich, so sollte ein 2D-FE-Modell der Befestigungssituation mit Verbundkontakten aufgestellt werden. Der Rechenaufwand und ebenso der Aufwand zur Erstellung des Modells erhöht sich jedoch deutlich, so dauert die Berechnung und vor allem die erforderliche feine Vernetzung des Kontaktbereichs mehrere Minuten bis teilweise sogar Stunden pro Modell.<sup>17</sup> Der zu erwartende weitere Genauigkeitsgewinn durch eine Modellierung als vollständiges 3D-FE-Modell rechtfertigt den nochmals deutlich erhöhten Aufwand bei Modellerstellung und Rechenzeiten nicht mehr.

Ebenso weist ein vollständiges 3D-FE-Modell gerade durch seine vielen Einstellmöglichkeiten auch viele potentielle Fehlerquellen auf. Hier hat wiederum ein vereinfachtes Rechenmodell wie das kombinierte Kreisring-Schalenmodell Vorteile. Durch die für eine analytische Lösbarkeit erforderlichen Vereinfachungen ist zwar eine größere Ungenauigkeit der Ergebnisse zu erwarten, jedoch sind deutlich weniger Fehler in der Durchführung der Berechnung durch den Anwender möglich.

## 5.5 Beispielrechnung

Die unterschiedlichen Methoden sollen in diesem Abschnitt am Beispiel des stirnseitig am Prüfstand aus Abb. 5.2 verschraubten Freilaufs vom Typ *Modell 1* verdeutlicht werden.<sup>18</sup>

Die Technische Zeichnung des stirnseitig befestigten Freilaufaußenrings mit dem Anschlussflansch und dem Festlagerbock ist in Abb. 5.30 gezeigt. Werden nun diese Körper für die Berechnung entsprechend des kombinierten Kreisring-Schalenmodells aus Abschnitt 5.3 durch rotationssymmetrische Zylinderschalen angenähert, so ergeben sich die ebenfalls in Abb. 5.30 dargestellten Körper  sowie

 bis .

Diese Ersatzkörper weisen die in Tab. 5.1 aufgeführten Hauptgeometrie Größen (Breite sowie Innen- und Außendurchmesser) auf. Der dem Freilaufaußenring ent-

---

<sup>17</sup>Die Rechenzeit ist natürlich auch von der Recherausstattung abhängig.

<sup>18</sup>Auf eine Berechnung über das einfache Federmodell wird aus naheliegenden Gründen verzichtet.

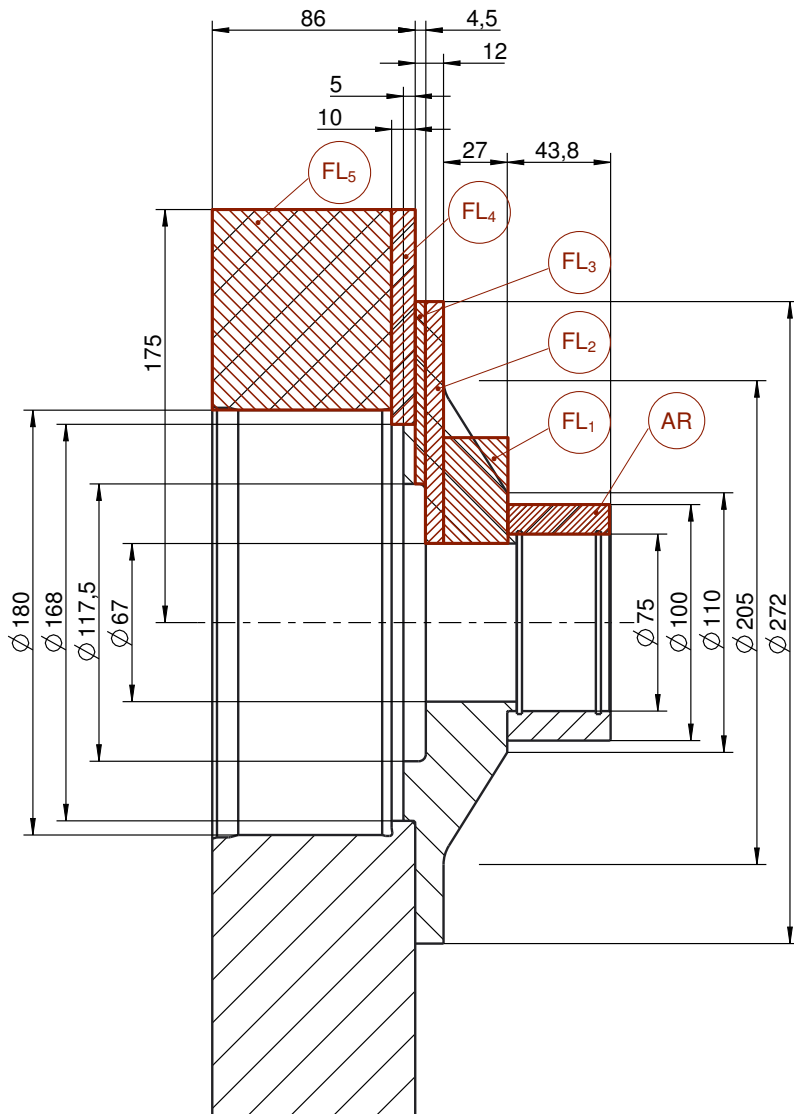


Abb. 5.30: Technische Zeichnung des stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf *Modell 1* mit Ersatzkörpern für die Berechnung nach dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell

Tab. 5.1: Hauptgeometriewerte der Ersatzkörper des stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf *Modell 1* für die Berechnung mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell

Körper	Breite $b$ in mm	Innendurchmesser $d$ in mm	Außendurchmesser $D$ in mm
AR <sub>1</sub>	9,4	75,0	100,0
AR <sub>2</sub>	25,0	75,0	100,0
AR <sub>3</sub>	9,4	75,0	100,0
FL <sub>1</sub>	27,0	67,0	157,5
FL <sub>2</sub>	7,5	67,0	272,0
FL <sub>3</sub>	4,5	117,5	272,0
FL <sub>4</sub>	10,0	168,0	350,0
FL <sub>5</sub>	76,0	180,0	350,0

sprechende Ersatzkörper kann wiederum in die drei Körper AR<sub>1</sub> bis AR<sub>3</sub> aufgeteilt werden, um den realen Klemmbereich mit der Breite der Klemmkörper  $b_K$ <sup>19</sup> abzubilden.

Um den realen Verbund aus Abb. 5.30 mit einfachen Hohlzylindern beschreiben zu können, sind einige weitere Vereinfachungen an der Geometrie vorgenommen worden. So wurden die Sicherungsringnuten am Freilaufaußenring und der Ansatz zur Innenzentrierung des Freilaufaußenrings am Anschlussflansch weggelassen. Weiterhin wurde der kegelige Abschnitt des Anschlussflanschs durch einen Hohlzylinder ersetzt, welcher mit 157,5 mm als Außendurchmesser den Mittelwert von Anfangs- (110 mm) und Enddurchmesser (205 mm) des Kegels aufweist. Ebenso wurde der Ansatz zur Innenzentrierung des Anschlussflanschs am Festlagerbock weggelassen.

Jedes Mal, wenn sich der mittlere Durchmesser ( $d_S = 2 \cdot r_S = \frac{D+d}{2}$ ) der Ersatzkörper ändert, wird ein schmaler Kreisring entsprechend Unterabschnitt 5.3.2 an der Verbindungsstelle der beiden Körper eingefügt. Die Formänderungswerte der restlichen Einzelkörper werden weiterhin alle als kurze Zylinderschalen nach Unterabschnitt 3.5.4 berechnet.

Mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell ergibt sich für diesen Fall bei einer

<sup>19</sup>Im Fall des Freilaufs *Modell 1* beträgt  $b_K = 25$  mm.



festen Einspannung des letzten Körpers (FL<sub>5</sub>) ein Kräfteverhältnis von

$$\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} (kKS_{\text{fest}}) \approx 0,283 \quad . \quad (5.35)$$

Für eine angenommene gelenkige Einspannung des Festlagerbocks ergibt sich ein etwas geringeres Kräfteverhältnis von

$$\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} (kKS_{\text{gelenk}}) \approx 0,278 \quad (5.36)$$

und für eine reine Führung dieses Körpers der nochmals geringere Wert von

$$\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} (kKS_{\text{los}}) \approx 0,268 \quad . \quad (5.37)$$

Werden im kombinierten Kreisring-Schalenmodell die dem Festlagerbock entsprechenden Ersatzkörper (FL<sub>4</sub>) und (FL<sub>5</sub>) weggelassen, so ergibt sich für das Kräfteverhältnis bei einer festen (biegesteifen) Einspannung des Körpers (FL<sub>3</sub>) ein Kräfteverhältnis von

$$\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} (kKS_{\text{fest}}) \approx 0,313 \quad . \quad (5.38)$$

Bei einer gelenkigen Einspannung ergibt sich mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell hier wiederum ein Wert von

$$\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} (kKS_{\text{gelenk}}) \approx 0,203 \quad (5.39)$$

und bei einer reinen Führung ein Kräfteverhältnis von

$$\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} (kKS_{\text{los}}) \approx 0,160 \quad . \quad (5.40)$$

Wird der in Abb. 5.30 dargestellte stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand verschraubte Freilauf *Modell 1* in einem mit einer Elementgröße von 0,1 mm fein vernetztem 2D-FE-Modell entsprechend Unterabschnitt 5.1.2 untersucht, so ergibt sich bei Betrachtung der drei Hauptkörper (Freilaufaußenring, Anschlussflansch und Festlagerbock) ein Kräfteverhältnis aus der 2D-FE-Simulation von

$$\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} (FE) \approx 0,135 \quad . \quad (5.41)$$

Das Kräfteverhältnis ist in diesem Fall unabhängig von der Modellierung der Verschiebungsrandbedingungen des Lagerbocks. Dieses Ergebnis entspricht den bereits in Unterabschnitt 5.1.2 beschriebenen. Der Unterschied zu den in diesem Unterabschnitt durchgeführten Simulationen ist, dass in diesem Fall der reale Klemmbereich mit seiner Breite von 25 mm mittig im Freilaufaußenring berücksichtigt wurde.<sup>20</sup>


Wird bei den 2D-FE-Simulationen der Festlagerbock ebenfalls nicht betrachtet, so hat die Art der Lagerung des Modells wieder einen Einfluss auf das sich ergebende Kräfteverhältnis. Für eine feste Einspannung des Anschlussflanschs an der ehemaligen Kontaktfläche mit dem Festlagerbock ergibt sich ein Kräfteverhältnis von

$$\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} (FE_{\text{fest}}) \approx 0,138 \quad (5.42)$$

und bei einer reinen Führung ein Kräfteverhältnis von

$$\frac{\Delta F_R}{F_{NK}} (FE_{\text{los}}) \approx 0,126 \quad . \quad (5.43)$$

Das kombinierte Kreisring-Schalenmodell liefert bei der Nachbildung dieses realen Falls durchweg höhere Kräfteverhältnisse als die entsprechenden 2D-FE-Modelle. Weiterhin hat die Art der Lagerungsbedingung innerhalb des kombinierten Kreisring-Schalenmodells einen stärkeren Einfluss auf das sich ergebende Kräfteverhältnis. Dieses Verhalten folgt aus der Vernachlässigung der Querkraftverformungen in der dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell zugrunde liegenden Schalentheorie. Laut ROIK [Roi78] würde die Berücksichtigung der Querkraftverformungen wie eine verminderte Biegesteifigkeit  $K$  der Zylinderschalen wirken.

Dementsprechend führt eine biegesteife Einspannung nochmals zu einer deutlich überhöhten Steifigkeit des Anschlusskörpers, weshalb für die Abschätzung des Kräfteverhältnisses mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell eine reine Führung (Lagerbedingung  in Abb. 5.18) empfohlen wird.

<sup>20</sup>Wie bereits in Unterabschnitt 5.1.2 beschrieben, sorgt die Berücksichtigung der Klemmbreite für eine Reduktion des entstehenden Kräfteverhältnisses.

## 6 Experimentelle Untersuchungen

Die im Zuge dieser Arbeit durchgeführten experimentellen Untersuchungen dienen der Absicherung der aufgestellten Theorie der behinderten radialen Aufweitung und der Validierung der Verfahren zur Abschätzung der relativen Übertragbarkeit bzw. der radialen Zusatzkräfte.

### 6.1 Reibwertuntersuchungen

Für die Auswertung der an stirnseitig befestigten Freiläufen durchgeführten Rutschversuche ist eine möglichst genaue Kenntnis der im stirnseitigen Kontakt vorherrschenden Haftreibwerte erforderlich. Reibwerte sind bekanntlich stark streuende Größen und hängen von einer Vielzahl von Einflussfaktoren ab.

#### 6.1.1 Aufbau des Reibwertprüfstands

Um die Unsicherheit des Haftreibwerts für die nachfolgende Versuchsauswertung zu minimieren, wurden Reibversuche auf dem Reibwertprüfstand des IMW durchgeführt. Die eigentliche Prüfvorrichtung des Reibwertprüfstands besitzt hierbei den in Abb. 6.1 gezeigten schematischen Aufbau. In diesem werden die Prüflinge (im vorliegenden Fall die Freilaufaußenringe) zwischen den Klemmbacken geklemmt, also mit einer Normalkraft  $F_N$  belastet. Hierzu wird über die Verstellspindel die bewegliche Klemmtraverse gegen den Lastrahmen gespannt. Die Verspannung kann über zwei mit DMS-Messstellen versehene Druckstangen gemessen werden. Nachdem der Prüfling zwischen den beiden Klemmbacken gespannt wurde, wird er über eine ebenfalls mit einer DMS-Messstelle versehene Zuglasche nach oben aus dem Klemmspalt gezogen. Die hierzu notwendige Zugkraft  $F_Z$  wird über einen Servomotor bereitgestellt. Da der verwendete Prüfaufbau zweischnittig ist, also der Prüfling an zwei Reib- bzw. Kontaktflächen im Eingriff bzw. gespannt ist, errechnet

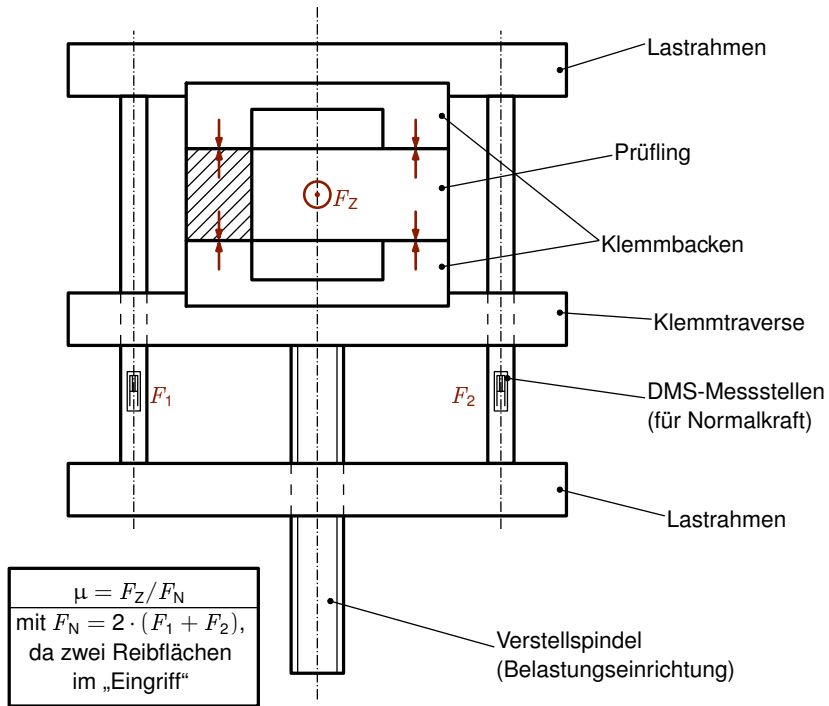


Abb. 6.1: Schematischer Aufbau des Reibprüfstands des IMW

sich der Reibbeiwert für die Reibversuche nach folgender Formel

$$\mu = \frac{F_Z}{F_N} = \frac{F_Z}{2 \cdot (F_1 + F_2)} \quad (6.1)$$

Der Reibprüfstand des IMW ist in Abb. 6.2 komplett dargestellt. Da eine Auswertung der Rutschversuche ohne Kenntnis des Rutschweges nicht sinnvoll bzw. eindeutig möglich ist, wurde der Prüfstand um eine laseroptische Wegmesseinrichtung erweitert. Mit dieser wurde die Verschiebung der Prüflinge gegenüber der Prüfstands-basis gemessen.

Um eine bestmögliche Übertragbarkeit der auf diesem Prüfstand ermittelten Reibwerte auf die späteren Versuchsbedingungen bei den Rutschversuchen zum experimentellen Nachweis der relativen Übertragbarkeit (siehe Kap. 6.4.1) zu gewährleisten, wurden die Klemmflächen der Klemmbacken mit den gleichen Fertigungs-



Abb. 6.2: Reibprüfstands des IMW

Tab. 6.1: Kennwerte und Hauptgeometriewerte der zur Verfügung stehenden Prüflinge

	<i>Modell 1</i>	<i>Modell 2</i>	<i>Modell 3</i>	<i>Modell 4</i>
<b>Geometrie Außenring</b>				
Außendurchmesser $D_{AR}$ in mm	100	105	150	150
Innendurchmesser $d_{AR}$ in mm	75	75	110	110
Breite $B_{AR}$ in mm	44	35	40	63
<b>stirnseitige Befestigung / Verschraubung</b>				
Teilkreisdurchmesser $d_T$ in mm	87	90	132	132
$z_S$ Schrauben am Teilkreis	6	6	8	8
<b>Momente</b>				
Nennmoment $M_{T,N}$ in Nm	500	560	1.600	2.150
Grenzmoment $M_{T,max}$ in Nm ( $M_{T,max} = 2 \cdot M_{T,N}$ )	1.000	1.180	3.200	4.300
<b>Freilaufbauart</b>				
Klemmrollenfreilauf (KR)	X			X
Klemmkörperfreilauf (KK)		X	X	

parametern auf der gleichen Fertigungsmaschine und vom gleichen Bearbeiter hergestellt wie die Adapterflansche in den späteren Versuchen. Die Oberflächen waren im Drehzustand, wurden also weder feingedreht noch geschliffen. Die Klemmbacken sowie die Adapterflansche für die späteren Versuche sind aus 42CrMo4 im vergüteten Zustand (+QT) gefertigt worden.

### 6.1.2 Untersuchte Prüflinge

Für die experimentellen Untersuchungen standen Prüflinge von vier verschiedenen Freiläufen zur Verfügung. Die wichtigsten Kennwerte und Geometriewerte dieser vier Freilaufmodelle sind in Tab. 6.1 aufgeführt. Bei den Freiläufen *Modell 1* und *Modell 4* handelt es sich hierbei um Klemmrollenfreiläufe (KR) von Hersteller A und bei den Freiläufen *Modell 2* und *Modell 3* handelt es sich wiederum um Klemmkörperfreiläufe (KK) von Hersteller B.

Die „großen“ Freiläufe *Modell 3* und *Modell 4* waren für den Reibprüfstand des IMW zu groß, weshalb an diesen Prüflingsbaugrößen keine Reibwerte bestimmt werden konnten. Um den Einfluss der behinderten radialen Aufweitung auf die relative Übertragbarkeit experimentell nachweisen zu können, wurden von den vier Freilaufmodellen sogenannte Dummy-Freiläufe hergestellt. Diese sind dem entsprechenden Freilaufmodell geometrisch nachempfunden, jedoch wurde der

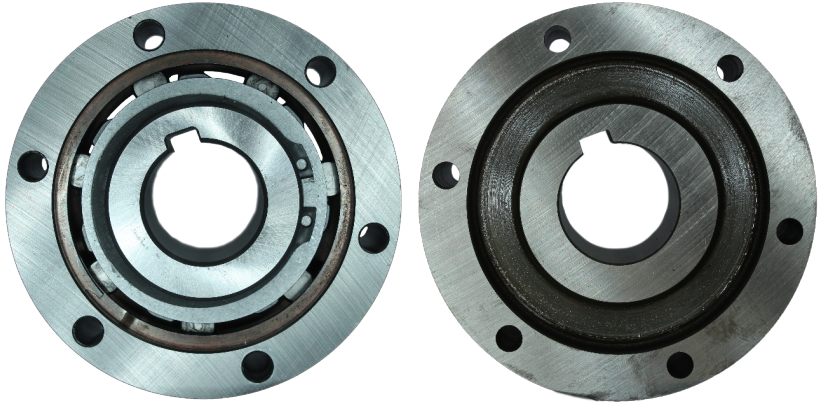


Abb. 6.3: Gegenüberstellung eines Freilaufs (links) und des entsprechenden Dummies (rechts) am Beispiel des Freilaufs *Modell 1*

Freilaufmechanismus (also der die Klemmkörper bzw. -rollen enthaltende Teil zwischen Freilaufaußenring und -innenring bzw. -stern) als Vollmaterial ausgeführt. Hierdurch ist eine Belastung der stirnseitigen Verschraubung mit einem „reinen“ Torsionsmoment, also ohne radial aufweitende Lasten möglich. Abb. 6.3 zeigt den „echten“ Freilauf *Modell 1* im Vergleich zu seinem Dummy. Es ist zu erkennen, dass die Anschlussmaße beider Prüflinge gleich sind und nur der eigentliche Freilaufteil beim Dummy durch Vollmaterial ersetzt wurde.

Die Freilaufaußenringe aller verwendeten Prüflinge wurden aus einsatzgehärtetem 16MnCrS5 gefertigt. Um wiederum eine bestmögliche Vergleichbarkeit zwischen den Freiläufen und ihren Dummies zu gewährleisten, wurden die Dummies nach den Herstellervorgaben gefertigt und die Kontaktflächen durch die Hersteller zusammen mit den „echten“ Freiläufen geschliffen.

### 6.1.3 Durchführung und Auswertung der Reibversuche

Wie bereits in Kap. 6.3 beschrieben, werden bei den Reibversuchen die Prüflinge zwischen den Klemmbacken gespannt und anschließend nach oben aus dem Reibspalt gezogen. Hierbei wurde zum einen der Weg und zum anderen die zum Herausziehen notwendige Zugkraft gemessen. Nach Gleichung (6.1) wird aus den über die drei DMS-Messstellen des Prüfstands gemessenen Kräften der aktuelle

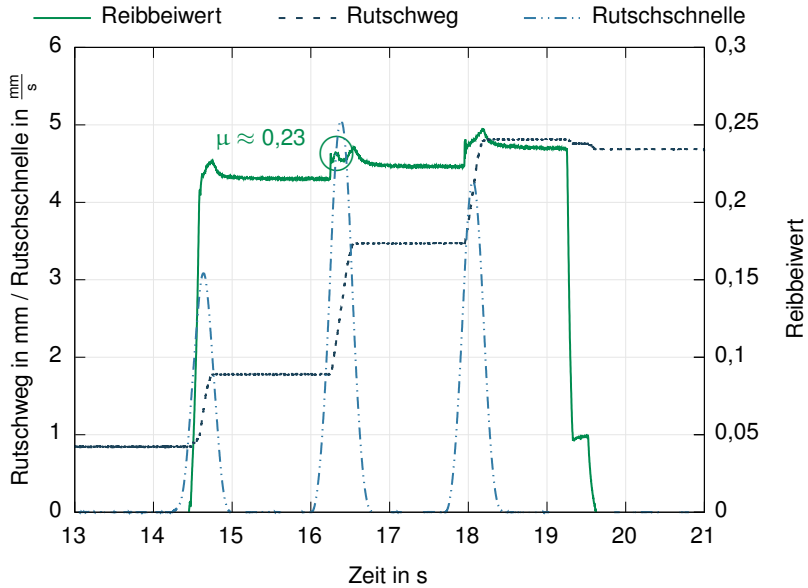


Abb. 6.4: Exemplarischer Verlauf des Reibbeiwerts und des Rutschwegs sowie der Rutschschnelle über der Versuchszeit für Dummy *Modell 1* - Prüfling P01 aus 16MnCrS5 in Paarung mit Klemmbacken aus 42CrMo4 mit vor dem Versuch gereinigten Reibflächen

Reibbeiwert bzw. das Kräfteverhältnis zwischen Zug- und Normalkraft berechnet. Für die Auswertung wird weiterhin über die zeitliche Änderung des aufgezeichneten Rutschwegs die Rutschschnelle (1. Ableitung des Rutschwegs nach der Zeit) berechnet.

Abb. 6.4 zeigt exemplarisch den Reibwertverlauf für einen der durchgeführten Reibversuche. Die Stufen ergeben sich aus der (einzig möglichen) manuellen Ansteuerung des Servomotors.

Anhand der Lage der sich aus dem eigentlichen Rutschvorgang ergebenden Peaks in der Rutschschnelle, dem Rutschweg und dem Verlauf des Reibbeiwerts kann der Haftreibwert bestimmt werden. Bei den in Abb. 6.4 dargestellten Verläufen sind drei Peaks in der berechneten Rutschschnelle erkennbar. Bei näherer Betrachtung der drei Signale im Bereich des ersten Peaks und ihrer Lage zueinander ist zu erkennen, dass der Anstieg des Kräfteverhältnisses (Reibbeiwert) gleichmäßig mit



der Zunahme des gemessenen Wegs gegenüber der Prüfstandsbasis (Rutschweg) stattfindet. Dieser erste Peak in der Rutschnelle steht somit nicht im Zusammenhang mit einem Rutschvorgang, sondern stellt die elastische Verformung des Prüfstands infolge des Aufbringens der Zugkraft dar.

Im Bereich des zweiten Peaks erfolgt die Zunahme des Rutschwegs direkt ab Beginn der Zunahme des Reibwerts. Es kam folglich zu einem echten Durchrutschen der Verbindung und das erste identifizierbare Maximum in diesem Bereich ist der gesuchte Haftreibwert. In diesem Fall lag der Haftreibwert für zuvor gereinigte Reibflächen bei  $\mu \approx 0,23$ . Ein erneutes Ziehen an dem Prüfling führte zu einem erneuten Rutschen, wobei sich der Haftreibwert gegenüber dem ersten Durchrutschen leicht erhöht hatte.

#### 6.1.4 Ergebnisse der Reibversuche

Auf die beschriebene Weise wurden nun Reibversuche an Freilaufaußenringen von *Modell 1* und *Modell 2* sowie an den entsprechenden Dummies durchgeführt. Hierbei wurden zwei Behandlungszustände der Reibflächen unterschieden:

- „gereinigt“ Bei diesem Zustand (A) wurden die Reibflächen vor Versuchsbeginn, also vor dem Klemmen der Prüflinge zwischen den Klemmbanken, mit Isopropanol entfettet und gereinigt.
- „unbehandelt“ Bei diesem Zustand (B) wurden die Reibflächen vor Versuchsbeginn nicht erneut mit Isopropanol entfettet oder gereinigt. (Versuche mit unbehandelten Oberflächen wurden bei neuen Prüflingen immer erst nach zumindest einem Versuch mit gereinigten Oberflächen durchgeführt.)

Die Ergebnisse der durchgeführten Reibversuche für die beiden Behandlungszustände an verschiedenen Prüflingen des Freilaufs *Modell 1* sind in Abb. 6.5 als Balken dargestellt. Am Fuß jedes Balken ist die Anzahl der zugrundeliegenden Versuche angegeben und jeder Balken ist mit seinem zugehörigen Vertrauensbereich für ein Konfidenzniveau von 95 % versehen. Es ist zu erkennen, dass sich die Vertrauensbereiche der verschiedenen Prüflinge überschneiden. Dies bedeutet, dass der Haftreibwert nicht statistisch signifikant vom Prüfling abhängt. Jeder Freilaufaußenring vom Typ *Modell 1* wird demnach bei gereinigten Reibflächen einen ähnli-

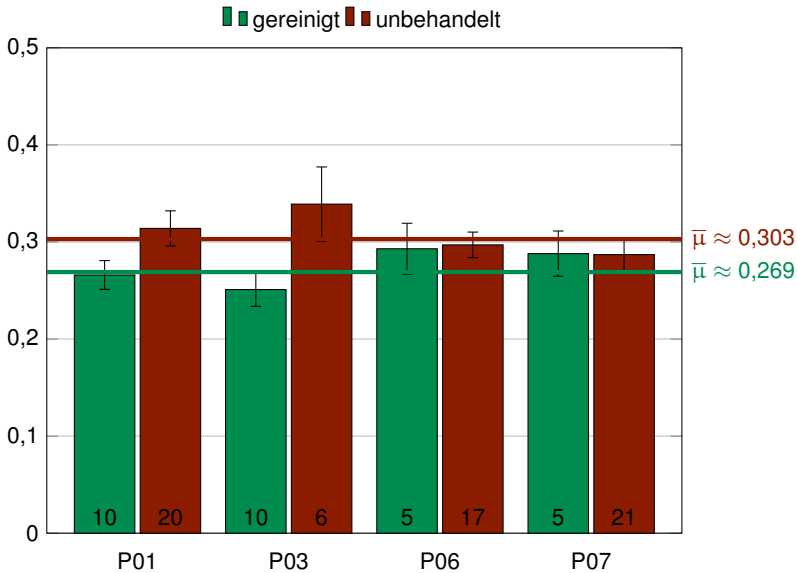


Abb. 6.5: Mittelwerte der Haftreibwerte für verschiedene Prüflinge des Freilaufs *Modell 1* bei gereinigten und unbehandelten Oberflächen mit zugehörigen 95 %-Vertrauensbereichen (am Fuß jedes Balkens steht die Anzahl der zugrundeliegenden Versuche)

chen Reibwert in Verbindung mit den Klemmbacken aus 42CrMo4 aufweisen. Wird aus allen mit gereinigten Oberflächen durchgeführten Reibversuchen ein mittlerer Haftreibwert für das *Modell 1* bestimmt, so ergibt sich der in Abb. 6.5 als durchgängige Linie dargestellte mittlere Haftreibwert von  $\overline{\mu_{M1,A}} \approx 0,269$  für gereinigte Oberflächen. Ähnliche Überlegungen führen bei unbehandelten Oberflächen auf einen mittleren Haftreibwert von  $\overline{\mu_{M1,B}} \approx 0,303$ .

Für den Freilauf *Modell 2* ergeben sich die in Abb. 6.6 dargestellten mittleren Haftreibwerte und 95 %-Vertrauensbereiche. Im Gegensatz zum *Modell 1* scheint die Wahl des Prüflings zumindest bei unbehandelten Oberflächen einen statistisch signifikanten Einfluss zu haben, jedoch ist der Unterschied zwischen den Reibwerten relativ gering und liegt innerhalb der Ergebnisstreuung der Versuche. Dementsprechend wird hier, wie bereits bei *Modell 1* eine Verrechnung der Ergebnisse der verschiedenen Prüflinge vorgenommen und es ergibt sich für den Freilauf *Modell 2* mit gereinigten Oberflächen ein mittlerer Haftreibwert von  $\overline{\mu_{M2,A}} \approx 0,269$  und mit

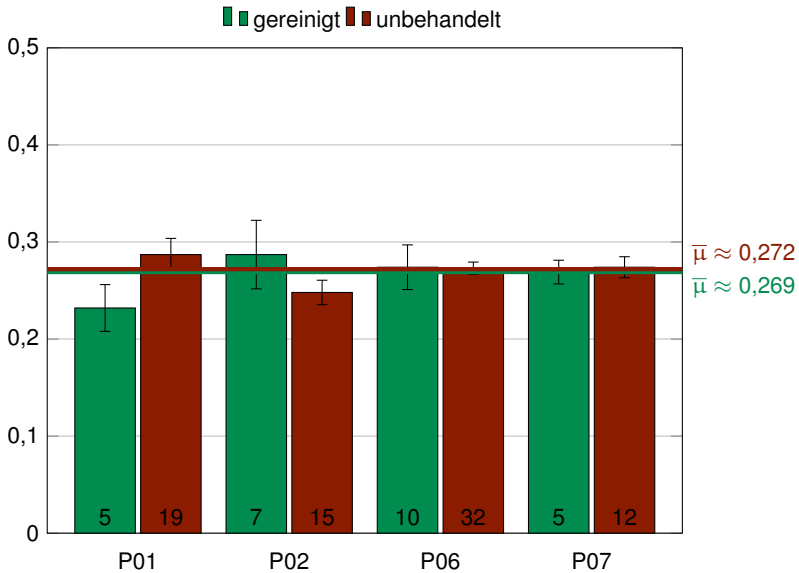


Abb. 6.6: Mittelwerte der Haftreibwerte für verschiedene Prüflinge des Freilaufs *Modell 2* bei gereinigten und unbehandelten Oberflächen mit zugehörigen 95%-Vertrauensbereichen (am Fuß jedes Balkens steht die Anzahl der zugrundeliegenden Versuche)

unbehandelten Oberflächen von  $\overline{\mu_{M2,B}} \approx 0,272$ .

Der Oberflächenzustand scheint bei beiden untersuchten Freiläufen ebenfalls keinen statistisch signifikanten Einfluss auf den Haftreibwert zu haben. Die Trennung dieser beiden Effekte wird jedoch erhalten, da sich die Oberflächenzustände durch eine entsprechende Versuchsführung gut einstellen lassen und damit eine geringere Streuung der Haftreibwerte (besonders für den Freilauf *Modell 1*) erreicht wird. Ebenso könnte auch argumentiert werden, dass die Art des Prüflings (ob *Modell 1* oder *Modell 2*) keinen statistisch signifikanten Einfluss auf den Haftreibwert hat. Da jedoch auch in diesem Fall eine einfache Trennung der Einflüsse möglich ist, wird auf eine weitere Verrechnung der mittleren Haftreibwerte hier ebenfalls verzichtet.

Bei den Freilaufdummies zeigte sich jedoch ein anderes Bild. So scheint beim *Dummy 1* (siehe Abb. 6.7) die Wahl des Prüflings einen statistisch signifikanten Einfluss zu haben. Der Oberflächenzustand wies weiterhin (pro Prüfling) einen derart geringen

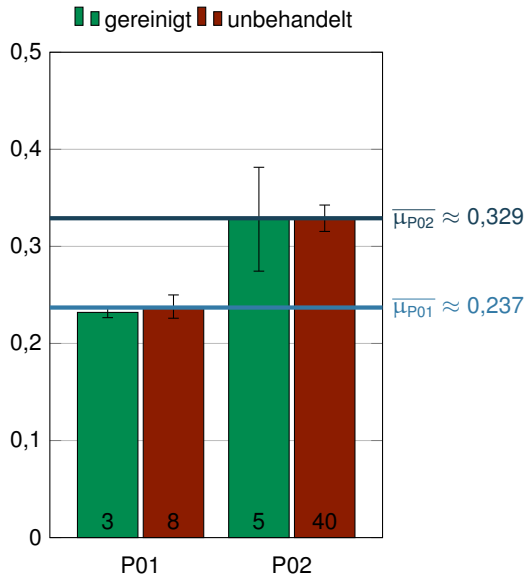


Abb. 6.7: Mittelwerte der Haftreibwerte für verschiedene Prüflinge des Freilaufs *Dummy 1* bei gereinigten und unbehandelten Oberflächen mit zugehörigen 95 %-Vertrauensbereichen (am Fuß jedes Balkens steht die Anzahl der zugrundeliegenden Versuche)

gen Einfluss auf, dass in diesem Fall eine Verrechnung der ermittelten Reibwerte pro Prüfling vorgenommen wurde. Der Prüfling P01 des *Dummy 1* wies demnach mit einem mittleren Reibwert von  $\bar{\mu}_{D1,P01} \approx 0,237$  einen deutlich geringeren mittleren Reibwert als der Prüfling P02 mit  $\bar{\mu}_{D1,P02} \approx 0,329$ .

Beim Freilaufdummy *Dummy 2* (siehe Abb. 6.8) schien wiederum, wie bereits bei den „echten“ Freiläufen, die Wahl des Prüflings keinen statistisch signifikanten Einfluss auf den Reibwert zu haben. Wiederum zeigte der Oberflächenzustand einen deutlichen Einfluss, weshalb bei diesem Prüfling der Behandlungszustand der Oberflächen wie bei den „echten“ Freiläufen ebenfalls getrennt betrachtet wird.

Die Ergebnisse der Reibwertuntersuchungen sind in Tab. 6.2 zusammengefasst. Hierbei werden neben der Größe der zugrundeliegenden Datenbasis (VZ) auch die minimal ( $\hat{\mu}$ ) und maximal ( $\hat{\mu}$ ) ermittelten Haftreibwerte sowie der mittlere Haftreibwert  $\bar{\mu}$  mit zugehöriger Standardabweichung  $\sigma$  angegeben.

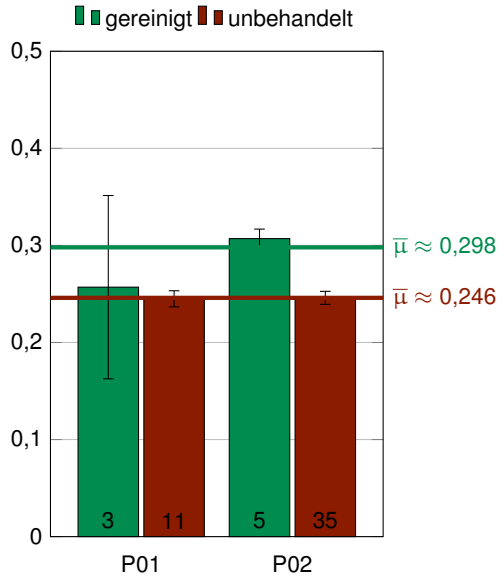


Abb. 6.8: Mittelwerte der Haftreibwerte für verschiedene Prüflinge des Freilaufs *Dummy 2* bei gereinigten und unbehandelten Oberflächen mit zugehörigen 95%-Vertrauensbereichen (am Fuß jedes Balkens steht die Anzahl der zugrundeliegenden Versuche)

Tab. 6.2: Statistische Kennwerte der ermittelten Haftreibwerte für die Freiläufe *Modell 1* und *Modell 2* und ihre entsprechenden Dummies (VZ: Anzahl der zugrundeliegenden Versuche)

	<b>Modell 1</b>		<b>Modell 2</b>		<b>Dummy 1</b>		<b>Dummy 2</b>	
	gereinigt (A)	unbehandelt (B)	gereinigt	unbehandelt	P01 (A+B)	P02 (A+B)	gereinigt	unbehandelt
VZ	30	64	27	78	7	48	7	46
$\check{\mu}$	0,225	0,221	0,217	0,219	0,219	0,252	0,264	0,214
$\hat{\mu}$	0,312	0,370	0,342	0,347	0,265	0,433	0,319	0,299
$\bar{\mu}$	0,269	0,303	0,269	0,272	0,237	0,329	0,298	0,246
$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$
$\sigma$	0,027	0,038	0,033	0,027	0,013	0,042	0,017	0,018

Tab. 6.3: Anziehfaktoren und erreichbare Vorspannkraftgenauigkeiten gängiger Anziehverfahren nach [VDI14a]

Anziehverfahren	Anziehfaktor $\alpha_A$		Vorspannkraftgenauigkeit		
drehmomentgesteuert	1,4	-	2,5	$\pm 17\%$	- $\pm 43\%$
drehwinkelgesteuert	1,2	-	1,4	$\pm 9\%$	- $\pm 17\%$
streckgrenzengesteuert	1,2	-	1,4	$\pm 9\%$	- $\pm 17\%$
dehnungsgesteuert (mechanische Längenmessung)	1,1	-	1,5	$\pm 5\%$	- $\pm 20\%$
dehnungsgesteuert (ultraschallgestützt)	1,1	-	1,2	$\pm 2\%$	- $\pm 9\%$

## 6.2 Erfassung der Schraubenvorspannung

Neben der Streuung der wirksamen Reibwerte in der stirnseitigen Verbindung stellt die bei der Montage erreichte Schraubenvorspannung einen weiteren Unsicherheitsfaktor für die durchzuführenden Nachweisversuche bzw. die stirnseitige Befestigung von Freiläufen im Allgemeinen dar. Um diesen Einfluss auf die Rutschmomente der stirnseitigen Befestigung zu minimieren, wurden Möglichkeiten zur Erfassung der Schraubenvorspannung mit Dehnungsmessstreifen (DMS) untersucht.

Wie bereits in Kap. 2.2 kurz beschrieben, ist der Zweck einer Schraubenverbindung die Betriebslasten in der Trennfuge zwischen den miteinander zu verbindenden Teilen kraftschlüssig zu übertragen. Der eigentliche Zweck der Schraube ist es also folglich, eine definierte Vorspannkraft zu erzeugen.

Hierbei ergibt sich jedoch das Problem, dass die Vorspannung der Schraube in der Regel nicht direkt eingestellt bzw. gemessen werden kann. Stattdessen wird die Vorspannung bei der Montage indirekt über das Anziehmoment eingestellt. Das Anziehdrehmoment ist hierbei stark abhängig von den Reibwerten im Gewinde und unter dem Schraubenkopf. Weiterhin weisen die Anziehverfahren teilweise erhebliche Streuungen in der durch sie erreichten Vorspannung auf. Die heutzutage etablierten Anziehverfahren und die damit erreichbaren Anziehfaktoren  $\alpha_A$  sowie die damit verknüpfte Vorspannkraftgenauigkeit sind in Tab. 6.3 aufgeführt. Die Werte sind der VDI Richtlinie 2230 entnommen.

Abgesehen von den dehnungsgesteuerten Methoden der mechanischen Längen-

messung und der Ultraschallmessverfahren, nutzen alle genannten Anziehverfahren das Anziehdrehmoment als Hilfsgröße, welche wie bereits beschrieben noch zusätzlich durch die Streuung der Reibwerte beeinflusst wird.

Aufbauend auf Veröffentlichungen von MICHIGK [Mic88], GERBER [Ger91] sowie HAUHOFF und WÜNSCH [HW94] wurde ein Verfahren zur Messung der Schraubenvorspannung über die Dehnung des Schraubenkopfs näher untersucht und weiterentwickelt. Hierbei wird der Umstand genutzt, dass sich auf dem Schraubenkopf, infolge der Schraubenvorspannung bzw. Zugspannung in der Schraube, ein Membranspannungszustand ausbildet. Vorteil dieses Verfahrens ist, dass keine Modifikationen an den innenliegenden Teilen der Schrauben oder gar den verspannten Teilen notwendig sind. Jedoch ist dieses Messverfahren derzeit auf Außensechskantschrauben beschränkt. Weiterhin müssen die Schraubenköpfe abgefräst bzw. geschliffen werden, um die DMS aufkleben zu können.

### 6.2.1 Voruntersuchungen zur Erfassung der Schraubenvorspannung

In einem ersten Versuch wurden in [Hof14] in Anlehnung an [HW94] M10-Schrauben sowohl mit einer DMS-Membran-Rosette als auch mit einem Linear-DMS (Standard-DMS) versehen und gegen eine Kraftmessdose mit Durchgangsbohrung als Referenz verspannt. Die Schrauben mit den auf den Schraubenköpfen installierten DMS sind in Abb. 6.9 gezeigt. Für die Installation der DMS wurden die Schraubenköpfe geplant. Die verwendete Membranrosette (rechts in Abb. 6.9) besteht aus 4 einzelnen Messgittern, welche als DMS-Vollbrücke verschaltet wurden. Der Linear-DMS (links in Abb. 6.9) wurde als Viertelbrücke verschaltet.

Der Aufbau der verwendeten Kalibriereinrichtung mit DMS-Messschraube (3) ist in Abb. 6.10 dargestellt. Diese besteht aus der Kraftmessdose (1), welche als Referenzaufnehmer für die Vorspannkraft fungiert, einer über ein axiales Nadellager (2) gelagerten Auflage (4) und dem Einschraubteil (5). Durch das Lager ist ein annähernd torsionsfreies Anziehen der Messschraube möglich und weiterhin wird die Kraftmessdose vor mechanischer Beschädigung geschützt.

Wie bereits kurz beschrieben, biegt sich die Fläche auf dem Schraubenkopf infolge der Schraubenvorspannung membranartig durch, was wiederum durch DMS gemessen werden und als Maß für die Schraubenvorspannung verwendet werden

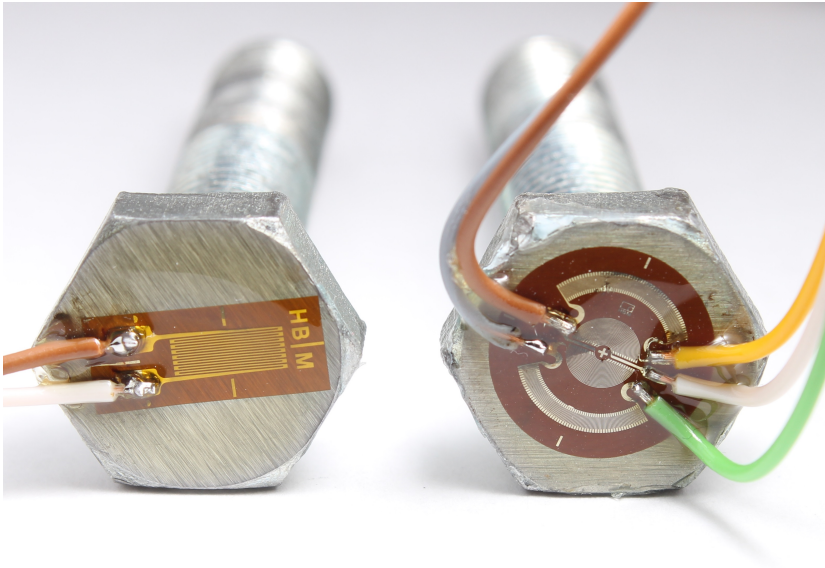


Abb. 6.9: DMS-Messschrauben mit Linear-DMS (links) und Membran-DMS (rechts)

kann. Die sich infolge der Vorspannkraft auf dem Schraubenkopf ausbildenden Radialdehnungen sind in Abb. 6.11 qualitativ gezeigt. Der höchste Dehnungsbetrag ergibt sich in der Mitte des Schraubenkopfs und es bildet sich ein annähernd radialsymmetrisches Dehnungsfeld aus.

Bei den Versuchen wiesen beide DMS-Arten eine gute Linearität zwischen der durch die DMS am Schraubenkopf gemessenen Dehnung und der durch die Referenz-Kraftmessdose gemessenen Vorspannkraft auf. Die Ergebnisse der ersten Voruntersuchungen mit dieser Messmethode sind in Abb. 6.12 dargestellt. Beide Messverfahren weisen eine ähnliche elektrische Empfindlichkeit auf. Im Fall des Membran-DMS ergibt sich durch die lineare Regression über alle Messpunkte eine elektrische Empfindlichkeit von  $S_{\text{Membran}} \approx 0,021 \frac{\text{mV/V}}{\text{kN}}$ , im Fall des Linear-DMS von  $S_{\text{Linear}} \approx 0,023 \frac{\text{mV/V}}{\text{kN}}$ .

Mit beiden DMS-Arten ist folglich eine reproduzierbare Messung der Schraubenvorspannkraft über die Kopfdurchbiegung mit ausreichender Empfindlichkeit möglich. Der Linear-DMS weist zwar eine etwas höhere Streuung besonders bei hoher Schraubenvorspannung auf, besitzt jedoch eine vergleichbare – im untersuch-



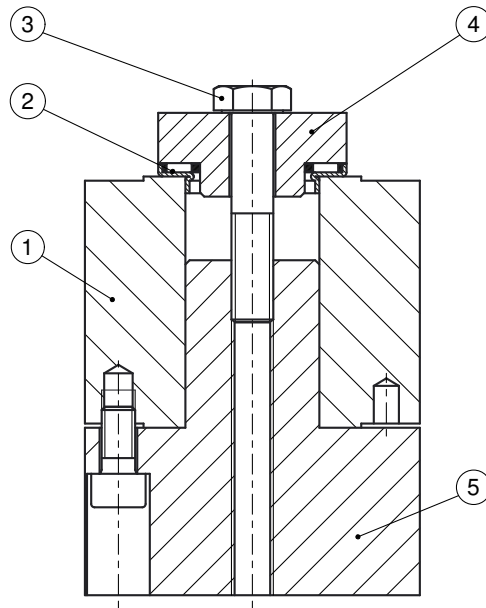


Abb. 6.10: Einfache Kalibriereinrichtung für DMS-Messschrauben

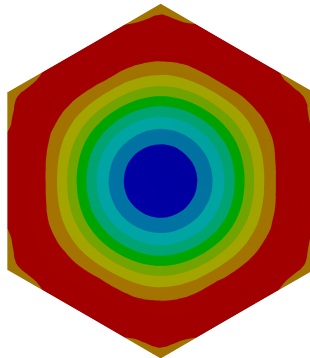


Abb. 6.11: Radialdehnungen am Schraubenkopf einer zentrisch vorgespannten Schraubenverbindung mit einer Sechskantschraube nach DIN EN ISO 4014 [ISO4014] und mittlerem Durchgangsloch nach DIN EN 20273 [EN20273]

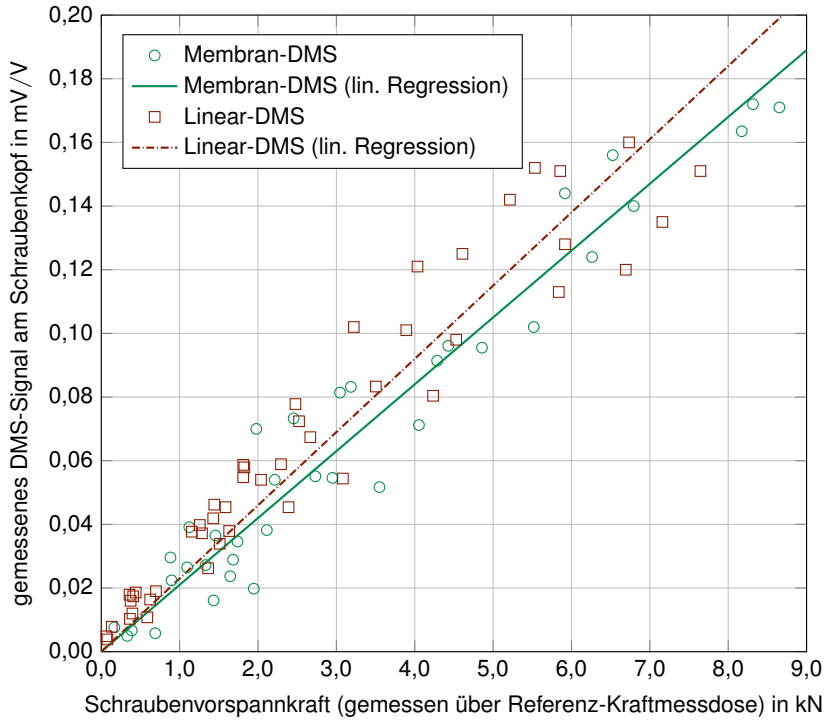


Abb. 6.12: Ergebnisse der Vorversuche mit Membran- und Linear-DMS auf abgeschliffenen Schraubenköpfen von M10-Schrauben nach DIN EN ISO 4014

ten Fall sogar leicht höhere – mittlere elektrische Empfindlichkeit. Die verwendete DMS-Viertelbrücke ist zwar temperaturempfindlich, ist jedoch gegenüber der Membran-Rosette deutlich günstiger in der Anschaffung und einfacher in der Installation.

Das Messverfahren zeigte sich empfindlich gegenüber dem Anziehen der Schrauben (im untersuchten Fall durch einen Ringschlüssel). Dies äußert sich in einem starken Überspringen bzw. Peak im DMS-Signal gegenüber dem Referenzsignal beim Anziehen, also dem Erhöhen der Vorspannkraft. Der Linear-DMS reagierte hierbei weniger stark auf den Anziehvorgang als der Membran-DMS. Abb. 6.13 zeigt einen beispielhaften Zeitverlauf für den Membran-DMS, in welchem die Verfälschung durch die Signalspitzen gut zu erkennen ist. Diese Signalverfälschung hängt vermutlich mit dem Tordieren des Schraubenkopfs beim Verschrauben zusammen. Abgesehen von dem Überspringen beim direkten Anziehvorgang, besteht jedoch eine gute Proportionalität zwischen den Signalen der DMS auf dem Schraubenkopf und der Schraubenvorspannkraft. Das Verfahren ist demnach für die quasi-statische Messung der Schraubenvorspannkraft gut geeignet.

### 6.2.2 Weiterentwicklung des Messverfahrens in [Cho16]

Nachdem die grundsätzliche Eignung des Messverfahrens überprüft und positiv beurteilt wurde, wurde das Messverfahren im Zuge der Masterarbeit CHORZEWSKI [Cho16] weiter untersucht und detailliert. Hierzu wurden unter anderem mögliche geometrische Einflussgrößen auf die sich auf dem Schraubenkopf ausbildende Dehnung über entsprechende FE-Modelle numerisch untersucht. Der den untersuchten FE-Modellen zugrunde liegende Aufbau ist in Abb. 6.14 mit Angabe der untersuchten geometrischen Einflussfaktoren (Parameter) dargestellt.

Hierbei konnten unter anderem die Ergebnisse aus Kapitel 6.2.1 bestätigt werden. Der sich auf dem Schraubenkopf ausbildende Dehnungszustand ist radialsymmetrisch und hat bei einer zentrisch verspannten Schraubenverbindung den maximalen Dehnungsbetrag in der Achse der Verschraubung. Weiterhin ergab sich aus den durchgeführten FE-Simulationen ein linearer Zusammenhang zwischen der Schraubenvorspannkraft und dem maximalen Dehnungsbetrag auf dem Schraubenkopf. Dieses Verhalten ist unabhängig von der Festigkeitsklasse der Schraube.

Die folgenden geometrischen Größen an den untersuchten Schraubenverbindun-

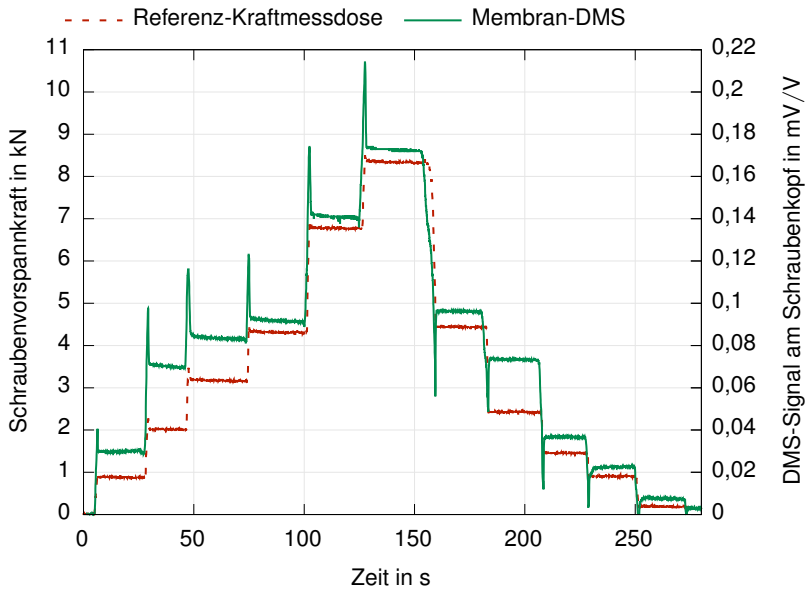


Abb. 6.13: Messsignal des Membran-DMS gegenüber der mit der Referenz-Kraftmessdose gemessenen Schraubenvorspannung im Zeitverlauf

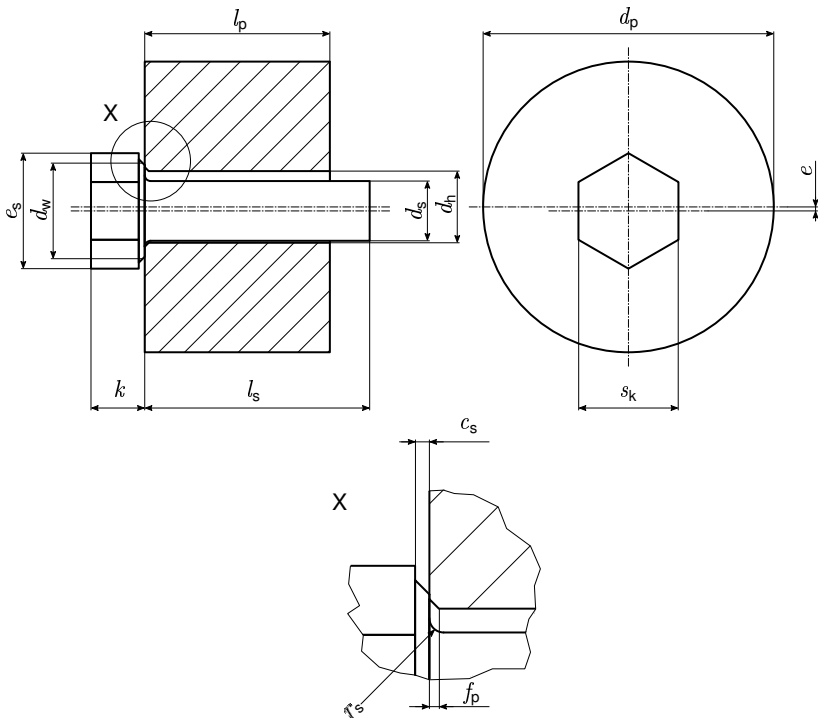


Abb. 6.14: Skizze des in [Cho16] verwendeten FE-Modells mit den untersuchten Geometrieparametern

Tab. 6.4: Veränderung des Betrags der Radialdehnung auf dem Schraubenkopf infolge der Steigerung des Parameters (– bedeutet eine Abnahme und + eine Zunahme des Dehnungsbetrags) nach [Cho16]

Parameter	Betragsänderung der Kopfdehnung
Schaftdurchmesser $d_s$	–
Außendurchmesser der Kopfauflage $d_w$	+
Kopfhöhe $k$	–
Übergangsradius am Schraubenkopf $r_s$	–
Durchgangsbohrung $d_h$	+
Exzentrische Verschiebung $e$	–
Fase an der Durchgangsbohrung $f_p$	+

gen nach Abb. 6.14 beeinflussen die Dehnungsintensität auf dem Schraubenkopf laut [Cho16] **nicht**:

- Höhe der Auflagefläche  $c_s$
- Außendurchmesser der verspannten Teile  $d_p$
- Eckenmaß des Schraubenkopfs  $c_s$
- Schraubenlänge  $l_s$
- Länge der verspannten Teile  $l_p$
- Schlüsselweite  $s_k$

Die in Tab. 6.4 aufgeführten Parameter beeinflussen hingegen die Dehnungsintensität auf dem Schraubenkopf. In der Tabelle ist die Beeinflussung der Radialdehnung auf dem Schraubenkopf hinsichtlich einer Steigerung des Dehnungsbetrags als positiv für das Messverfahren zu bewerten, da damit eine höhere elektrische Empfindlichkeit erreicht wird. Abgesehen von dem Einfluss einer möglichen exzentrischen Verschiebung der Schraubenachse gegenüber der Achse der Durchgangsbohrung, liegt nach [Cho16] ein lineares Verhalten zwischen der Änderung der Parameterwerte und dem Dehnungsbetrag vor. Das lineare Verhalten ist einfach zu erklären, da über diese Parameter entweder die Hebelverhältnisse zwischen der Schraubenachse und der Auflagefläche auf dem größten Durchmesser der Durchgangsbohrung oder die Nachgiebigkeit des Schraubenkopfs angepasst werden.

Aus den Ergebnissen in Tab. 6.4 könnte nun gefolgert werden, dass für eine hohe Empfindlichkeit des Messverfahrens ein größtmöglicher Unterschied zwischen dem

größten Durchmesser der Durchgangsbohrung unter der Kopfauflage und dem Schraubendurchmesser angestrebt werden sollte. Ebenso könnte gefolgert werden, dass der Schraubenkopf eine möglichst breite Kopfauflage und gleichzeitig geringe Kopfhöhe besitzen sollte. Dies ist zwar prinzipiell richtig, jedoch sollte hierbei beachtet werden, dass zum einen ein großer Unterschied zwischen Durchgangsbohrung und Schraubendurchmesser auch eine große Exzentrizität der Schraubenverbindung nach sich ziehen kann. Dies würde sich wiederum aufgrund des nichtlinearen Einflusses der Exzentrizität auf die Kopfdehnung schnell negativ auswirken. Zum anderen kann die Nachgiebigkeit des Schraubenkopfs nicht beliebig reduziert werden, ohne die Festigkeit der Schraube herabzusetzen. Ein Anhaltswert hierfür kann DIN 7984 [DIN7984] entnommen werden, demnach sind die aus der Zugfestigkeit nach DIN EN ISO 3506-1 [ISO3506] und DIN EN ISO 898-1 [ISO898] resultierenden Mindestbruchkräfte im Fall der niedrigen Kopfhöhe auf jeweils 80 % zu reduzieren.

Um die DMS auf dem Schraubenkopf installieren zu können, muss jedoch die nach [ISO898] bzw. [ISO3506] vorgeschriebene Beschriftung auf dem Schraubenkopf entfernt werden. Um hierbei die Festigkeit der Schraube nicht negativ zu beeinflussen, sollte die Kopfhöhe nur so minimal wie möglich und hierbei bis maximal knapp unter die Mindestkopfhöhe der Produktklasse B nach DIN EN ISO 4014 [ISO4014] abgeschliffen werden. Bei einer M8-Schraube nach [ISO4014] beträgt die Nennkopfhöhe  $k$  zum Beispiel 5,30 mm und die Mindestkopfhöhen betragen für die Produktklasse A 5,15 mm und für die Produktklasse B 5,06 mm. Demnach würde hier eine abgeschliffene Kopfhöhe von minimal 5,00 mm vorgeschlagen. In der Regel besitzen die Schrauben jedoch eine annähernd der Nennkopfhöhe entsprechende Kopfhöhe, weshalb in diesen Fällen ein Abschleifen der Schraubenköpfe ohne zu erwartenden Festigkeitsverlust der Schraube möglich ist.

Im Zuge der Masterarbeit [Cho16] wurde eine weitere Kalibriereinrichtung für DMS-Messschrauben entworfen, diese ist in Abb. 6.15 in Explosionsdarstellung gezeigt. In dieser wird die zu untersuchende Messschraube (1) mittig durch die Kalibriereinrichtung gesteckt und mit einer Mutter (9) verspannt. Die beiden Hauptteile (3) und (6) sind über vier Nasen ineinander axial verschieblich geführt. Im Inneren der Schraubenkalibriereinrichtung ist eine Ringkraftmessdose (5) mit entsprechenden Anlageringen (11) und einer Zentrierhülse (12) verbaut. Die Kraftmessdose misst hierbei die von der Messschraube aufgebraachte Vorspannkraft als

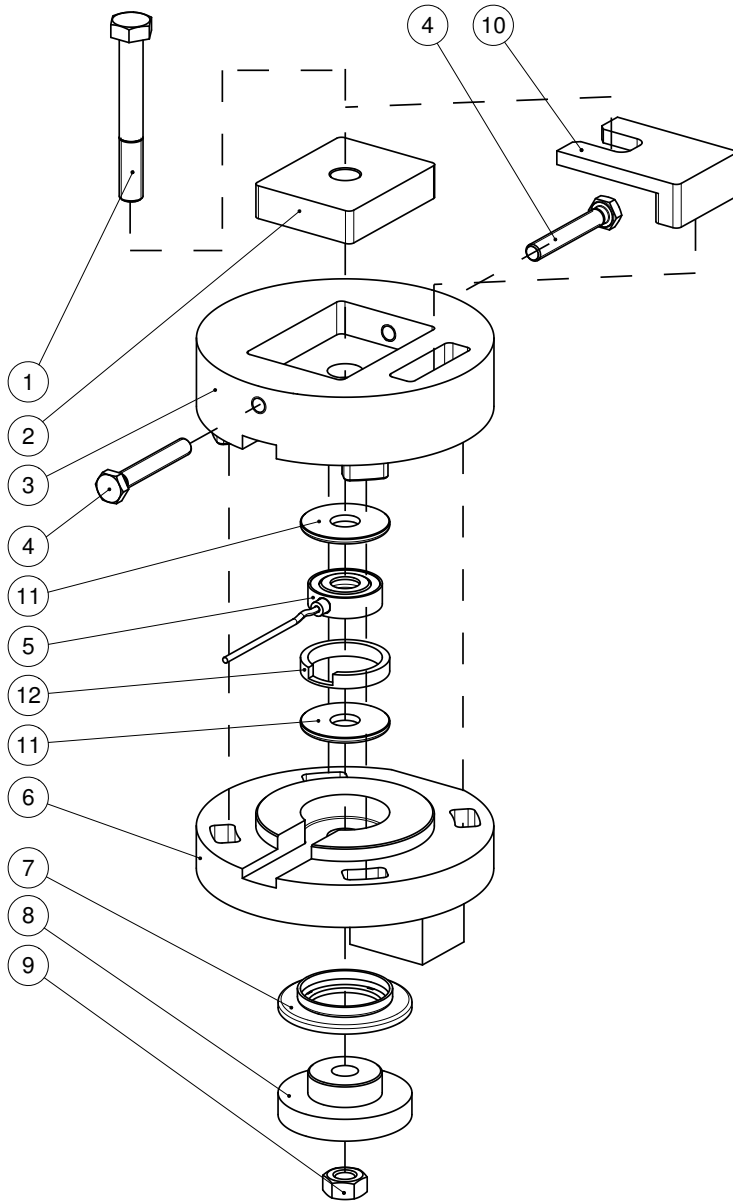


Abb. 6.15: Explosionsdarstellung der in [Cho16] konstruierten und verwendeten Schraubenkalibriereinrichtung



Referenz zu der von den DMS auf dem Kopf der Messschraube gemessenen Kopfdehnung. Die Messschraube wird über die Mutter angezogen, damit hierbei die Mutterauflage (8) nicht beschädigt wird, ist diese mit einem Axiallager (7) gegen den Prüfstand abgestützt. Der Schraubenkopf wird über einen entsprechenden Halter (10) fixiert. Die Mutterauflage sowie die Kopfauflage (2) können an die entsprechende Schraubengröße oder auch andere zu untersuchende Parameter wie z.B. eine Fase an der Kopfauflagefläche angepasst werden. Die Kopfauflagefläche kann zusätzlich über die beiden Schrauben (4) verschoben werden, um den Einfluss einer exzentrischen Bohrungsachse untersuchen zu können.

Der Schraubenhalter wurde nach den ersten Versuchen nochmals angepasst und so ausgeführt, dass er den kompletten Schraubenkopf umschließt. Durch diese Anpassung kann das bereits aus den Vorversuchen bekannte „Überschwingen“ beim Anziehen (vgl. Abb. 6.13) deutlich reduziert werden. Hieraus ist abzuleiten, dass, um eine geringe Streuung zu erhalten, die Messschrauben in den späteren Versuchen mit einem Ringschlüssel oder einer Sechskantnuss und nicht mit einem einfachen Gabelschlüssel angezogen werden sollten. Abb. 6.16 zeigt die Draufsicht auf die gefertigte Schraubenkalibriereinrichtung mit angepasstem Schraubenhalter und einer DMS-Messschraube M8 mit auf dem Schraubenkopf installiertem Linear-DMS mit einer Gitterlänge von 1,5 mm.

In [Cho16] wurde ein Verfahren zum Einmessen der Messschrauben festgelegt, in welchem die Messschrauben 3-mal hintereinander jeweils entsprechend dem in Abb. 6.17 dargestellten Ablauf, also in auf- und absteigenden Stufen, angezogen werden. Nach jeder Erhöhung der Anziehungskraft wird der Anziehvorgang kurz pausiert, um das DMS-Signal auf dieser Stufe später automatisiert auswerten zu können. Hierzu wurde in [Cho16] ein Auswertungsskript geschrieben. Dieses stellt die Schraubenvorspannkraft, welche über die Ringkraftmessdose gemessen wurde, gegenüber der Empfindlichkeit der DMS-Messschraube dar.

### 6.2.3 Ergebnisse der Untersuchungen in [Cho16]

In [Cho16] wurden die zuvor bereits per FE-Simulation identifizierten Einflussgrößen experimentell untersucht und gegenüber den Ergebnissen der FE-Simulationen verglichen. Hierbei konnte gezeigt werden, dass mit diesem Messverfahren ab 50 % der maximal zulässigen Schraubenvorspannkraft bei zentrischer

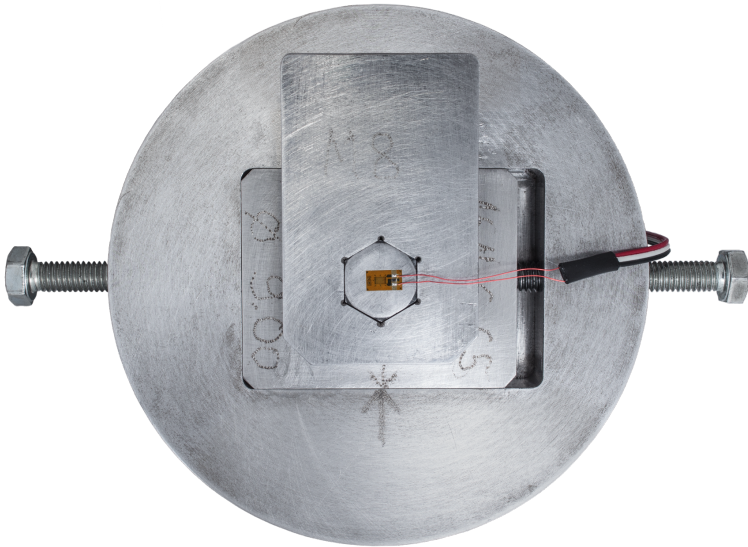


Abb. 6.16: Draufsicht auf die Schraubenkalibriereinrichtung mit M8 DMS-Messschraube mit einfachem Linear-DMS vom Typ C2A-06-062LW-350 der Firma Micro-Measurements (VISHAY) aus [Cho16]

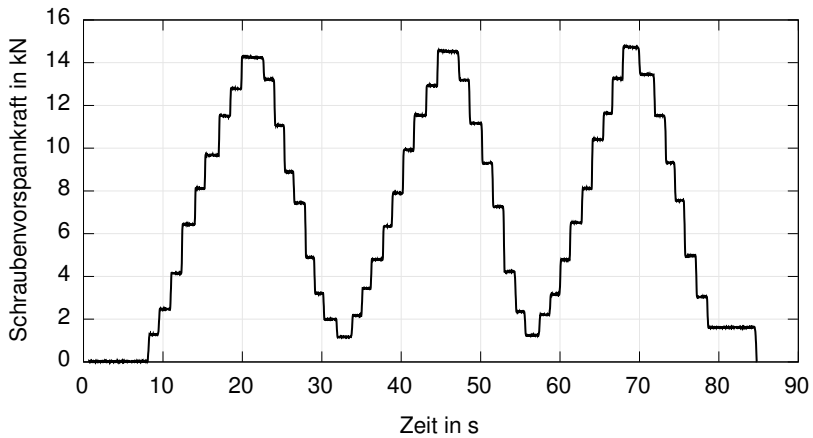


Abb. 6.17: Beispielhafter Zeitverlauf der Schraubenvorspannkraft während einer Messung an einer M8-DMS-Messschraube nach [Cho16]

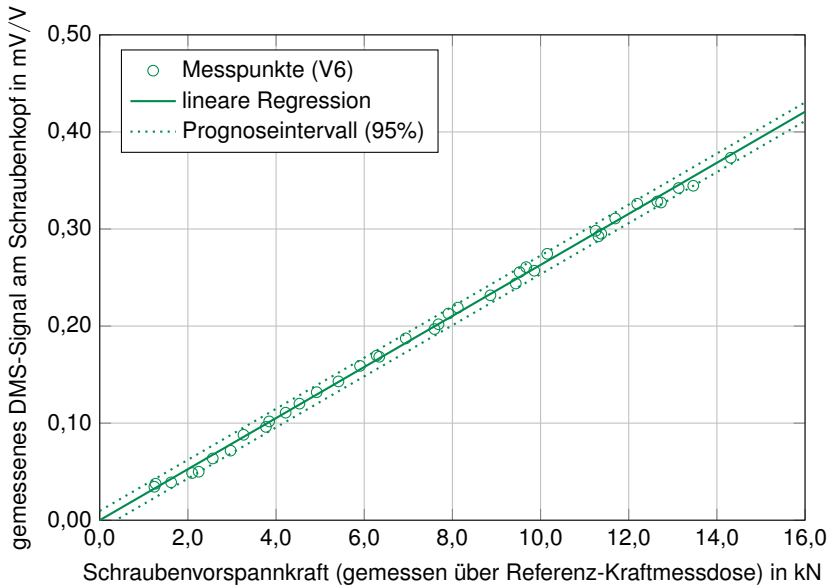


Abb. 6.18: Messpunkte (V6) und daraus ergebende mittlere Empfindlichkeitsgerade  $S_{\text{DMS}} \approx 0,0263 \frac{\text{mV/V}}{\text{kN}}$  mit zugehörigem Prognoseintervall (95 %) für eine frei angezogene M8 Sechskantschraube mit Unterlegscheibe und Linear-DMS vom Typ C2A-06-062LW-350 auf dem Schraubenkopf bei einer mittleren Durchgangsbohrung ( $d_h = 9 \text{ mm}$ ) (nach [Cho16])

Montage der Schraube und auf die bekannte Schraubendurchgangsbohrung individuell eingemessene Schraube ähnlich geringe Anziehungsfaktoren und somit hohe Vorspannkraftgenauigkeiten wie bei den dehnungsgesteuerten Anziehverfahren nach Tab. 6.3 erreicht werden. Unter diesen Voraussetzungen sind nach [Cho16] Vorspannkraftgenauigkeiten von  $\pm 6 \%$  bis  $\pm 12 \%$  zu erwarten.

Abb. 6.18 zeigt die durch lineare Regression in [Cho16] bestimmte Empfindlichkeitsgerade für eine frei angezogene M8 Schraube nach DIN EN ISO 4014 mit einfachem Linear-DMS vom Typ C2A-06-062LW-350 der Firma Micro-Measurements (VISHAY) auf dem geplanten Schraubenkopf. Die Empfindlichkeitsgerade wurde nach dem in Abb. 6.17 dargestellten Versuchsablauf für eine mittlere Durchgangsbohrung von  $d_h = 9 \text{ mm}$  bestimmt. Freies Anziehen bedeutet hierbei, dass die Schraube nicht durch den Schraubenhalter (10 in Abb. 6.15) zentriert wurde, sondern mehr oder weniger frei in mittlerer Position vor der Montage eingesetzt

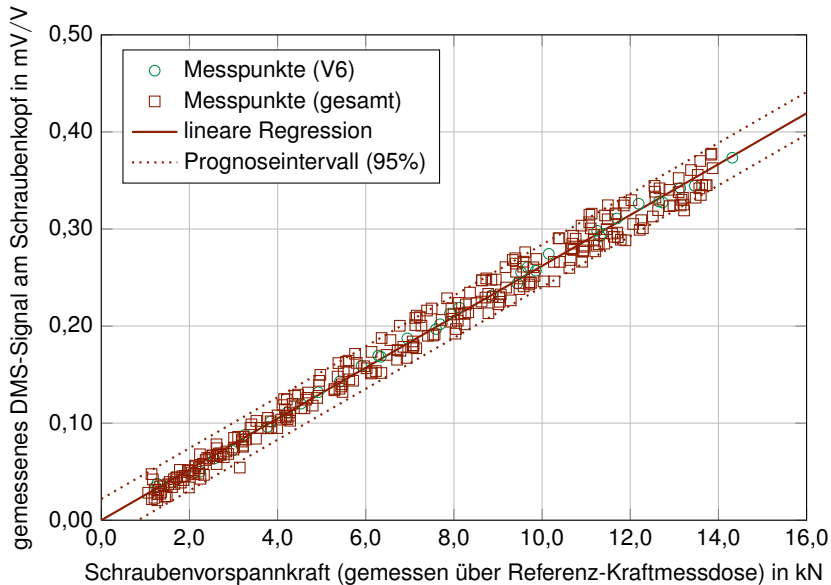


Abb. 6.19: Messpunkte (gesamt) und daraus ergebende mittlere Empfindlichkeitsgerade  $S_{\text{DMS}} \approx 0,0262 \frac{\text{mV/V}}{\text{kN}}$  mit zugehörigem Prognoseintervall (95 %) für frei angezogene M8 Sechskantschrauben mit Unterlegscheiben und Linear-DMS vom Typ C2A-06-062LW-350 auf dem Schraubenkopf bei einer mittleren Durchgangsbohrung ( $d_h = 9 \text{ mm}$ ) (nach [Cho16])

wurde. Um die Streuweite einer einzelnen Messungen gegenüber mehreren Messungen darzustellen, ist in Abb. 6.19 die mittlere Empfindlichkeitsgerade über – in diesem Fall – insgesamt 8 Einzelmessungen mit jeweils neuem Einsetzen der gleichen Schraube vor der erneuten Versuchsdurchführung mit den ansonsten gleichen Versuchsparametern und der gleichen Schraube wie in Abb. 6.18 gezeigt.

Wie bereits beschrieben, erhöht eine grobe Durchgangsbohrung bei zentrischer Montage der Schraube die zu erwartende Empfindlichkeit des DMS auf dem Schraubenkopf. Gleichzeitig erhöht sich jedoch das Risiko einer exzentrischen Montage, welche wiederum je nach Ausrichtung des Messgitters zur Exzentrizität einen nichtlinearen Einfluss hat und die Streuung der Schraubenvorspannkraft deutlich erhöht. Dieser nichtlineare Einfluss kann durch die Verwendung einer herkömmlichen Unterlegscheibe unterdrückt werden. Ein weiterer positiver Effekt der Unterlegscheibe ist, dass die Empfindlichkeit der Messschraube mit Unterlegschei-

Tab. 6.5: Anziehfaktoren und erreichbare Vorspannkraftgenauigkeiten mit DMS-Messschrauben bei Einmessen jeder Schraube gepaart mit einer zugehörigen Unterlegscheibe und beliebiger Durchgangsbohrung und freier Lage der Schraube (nach [Cho16])

Schraubengröße	Anziehfaktor $\alpha_A$			Vorspannkraft- genauigkeit		
M6	1,14	-	1,30	$\pm 6,4\%$	-	$\pm 12,9\%$
M8	1,17	-	1,37	$\pm 7,7\%$	-	$\pm 15,5\%$

be quasi unabhängig von der vorliegenden Durchgangsbohrung und Fase wird. Werden die Messschrauben nun mit Unterlegscheiben jeweils einzeln eingemessen, so ergibt sich eine zu erwartende Vorspannkraftgenauigkeit von  $\pm 8\%$  bis  $\pm 15\%$ .

Dementsprechend wird für die folgenden Versuche empfohlen, die Messschrauben jeweils mit zugehöriger Unterlegscheibe individuell einzumessen. Unter diesen Einmessbedingungen wurden in [Cho16] mit den DMS-Messschrauben die in Tab. 6.5 aufgeführten Anziehfaktoren und Vorspannkraftgenauigkeiten erreicht. Damit steht nun ein geeignetes, erprobtes und auch genaues Messverfahren zur Ermittlung der Schraubenvorspannung während der Montage und zur Reduktion der damit verbundenen Unsicherheiten für die späteren Versuche zur Verfügung.

Bei der Benutzung der Messschrauben mit klassischen Folien-DMS zeigte sich die kabelgebundene elektrische Anbindung der DMS an den Messverstärker als wenig robust und mechanisch sehr anfällig. Um hier etwas Abhilfe zu schaffen, wurden die dünnen Lackdrähte (zu sehen in Abb. 6.16) in einer Vergusskappe aus einem 1-K-PU-Elastomer eingeschlossen, was die Handhabung der Messschrauben deutlich verbesserte und in der Anwendung robuster machte.

## 6.2.4 Mögliche zukünftige Weiterentwicklung des Messverfahrens

Nachdem in den bisherigen Versuchen nachgewiesen wurde, dass die Messung der Schraubenvorspannkraft über auf dem Schraubenkopf installierte DMS möglich ist und mit diesem Verfahren – selbst bei Nutzung einfacher Linear-DMS – hohe Vorspannkraftgenauigkeiten erzielt werden können, welche im Bereich der derzeit genauesten ultraschallgestützten Anziehverfahren (vgl. Tab. 6.3 und Tab. 6.5)

liegen, sollen an dieser Stelle weitere Entwicklungsmöglichkeiten dieses Messverfahrens kurz aufgezeigt werden.

Wie bereits beschrieben, sind die klassischen Folien-DMS in dieser Messaufgabe nicht sehr robust und weiterhin ist der Installationsaufwand pro Schraube erheblich. Ebenso ist die Auswahl geeigneter Messgitter stark eingeschränkt, so dass im Moment ein einfacher Linear-DMS den besten Kompromiss aus Aufwand, Kosten und Nutzen darstellt. Die Verwendung dieses Messgitteraufbaus macht das Verfahren jedoch anfällig für den nichtlinearen Einfluss einer Exzentrizität der Schrauben- zur Bohrungsachse. In [Cho16] wurde bereits gezeigt, dass mit einer 90°-Zweigitter-DMS-Rosette, die zu einer sogenannten 3/4-Brücke verschaltet werden müsste, der nichtlineare Einfluss der Exzentrizität in der DMS-Schaltung zu einem Großteil kompensiert werden könnte.

Durch die Vorteile der Dünnschichttechnik könnten diese Beschränkungen überwunden werden und damit das Messverfahren allgemeiner einsetzbar und robuster werden. Durch das Aufsputtern der Messgitter und eventuell weiterer Schaltkreise können auch speziell angepasste Messgitterformen realisiert werden, die für die Messaufgabe optimiert sind. Durch die Verarbeitung der Messschrauben in sogenannten Batches, also mehrere Schrauben auf einmal, sind relativ geringe Stückkosten erreichbar, die die Kosten der bisherigen Messschrauben mit klassischen Folien-DMS unterschreiten. Ebenso ist es denkbar, auch die Schraubenmuttern in Dünnschichttechnik zu beschichten und somit zum Messen der Vorspannkraft zu ertüchtigen. Dies macht auch die Vorspannkraftmessung an Schraubenbolzen möglich, wie sie zum Beispiel bei Windkraftanlagen häufig anzutreffen sind. Abb. 6.20 zeigt die Radialdehnung auf der Stirnseite einer Schraubenmutter nach DIN EN ISO 4032 [ISO4032].

Weiterhin ist es auch denkbar, durch entsprechend angepasste Messgitter an der Schraube auch weitere Schraubenbelastungen wie ein eventuell vorhandenes Biegemoment längs der Schraubenachse oder ein Torsionsmoment zu messen. In Abb. 6.21 sind beispielhafte Aufbauten einer Messschraube und Messmutter mit Dünnschicht-DMS gezeigt, die zusammen als eine intelligente sensorische Schraubenverbindung bezeichnet werden können. Die Mutter/Schrauben selbst weisen hierbei typischerweise einen Kopf (1) und ein Gewindeteil (3) auf und müssen keine besonderen Anforderungen erfüllen. Es können Mutter/Schrauben aller Normen und auch Sonderschrauben als Basis für eine Dünnschichtsensormutter (DSS-

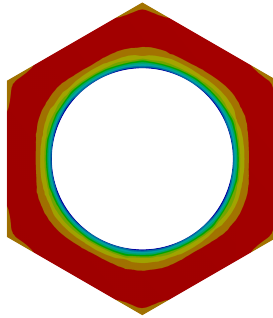


Abb. 6.20: Radialdehnungen auf der Stirnseite einer Schraubenmutter nach DIN EN ISO 4032 [ISO4032] an einer zentrisch vorgespannten Schraubenverbindung mit einer Sechskantschraube nach DIN EN ISO 4014 [ISO4014] und mittlerem Durchgangsloch nach DIN EN 20273 [EN20273]

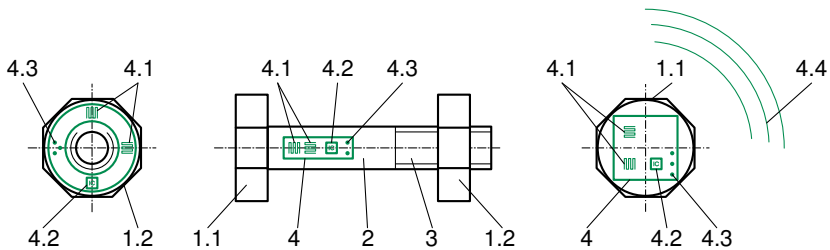


Abb. 6.21: Intelligente sensorische Schraubenverbindung mit Dünnschicht-DMS

Mutter) und -schraube (DSS-Schraube) genutzt werden. Im Folgenden wird die Idee der intelligenten sensorischen Schraubenverbindung mit möglichen Anwendungen kurz vorgestellt.

Auf die Mutter (1.2) oder den Schraubenkopf (1.1) oder auch auf einen eventuell vorhandenen Schraubenschaft (2) wird die Sensoranordnung (4) in Dünnschicht-technik aufgebracht. Die Sensoranordnung weist hierbei dehnungsempfindliche Sensorelemente (4.1) auf, welche nach dem Widerstandsmessprinzip arbeiten. D.h. die aufgebrachte Sensorschaltung ändert ihren Widerstand proportional zur aufgebrachten Belastung. Die Sensorelemente, welche die Belastungen auf die Schraube messen, werden hierbei auf einen sich im Kraftfluss der verspannten

Teile der Schraubenverbindungen befindlichen Teil der Schraube aufgebracht. Diese Sensorelemente sind entsprechend angeordnet, um die eingangs benannten Schraubenbelastungen messen zu können.

Das Sensorelement kann weiterhin eine Kontaktierung (4.3) und Elemente enthalten, die die Messdaten verstärken oder anderweitig aufbereiten (4.2). Beispielfhaft seien hier Möglichkeiten genannt, die Messdaten per Datenfernübertragung (4.4) auf ein beliebiges Anzeigegerät zu übertragen, dort weiter zu verarbeiten und zu speichern. Weiterhin kann eine zur eindeutigen Identifizierung geeignete Information mit übertragen werden und die Sensorschaltung auf dem Kopf dahingehend erweitert werden, dass sie eine Abfrage der Belastungen beim Anziehen und im angezogenen Zustand durch eine entsprechende elektrische Verbindung mit einem Auswertewerkzeug erlaubt.

Ein Anwendungsbeispiel ist die Verwendung mehrerer DSS-Muttern und DSS-Schrauben in Anlagen mit sicherheitsrelevanten Verschraubungen, welche regelmäßig überwacht bzw. kontrolliert werden müssen. Zur Kontrolle der zu überwachenden Verschraubungen kann die Vorspannung der Schrauben per Datenfernübertragung abgefragt werden. Dies kann quasi „im Vorbeigehen“ erfolgen.

Eine weitere mögliche Anwendung ist die Verwendung von DSS-Muttern und DSS-Schrauben als hochgenaues Anziehverfahren für hochbeanspruchte Schraubenverbindungen. Da die Schraubenvorspannung direkt über die Kopf- oder Schaftdehnung gemessen wird, wird eine deutlich geringere Streuung der Montagevorspannkraft erreicht, als bei drehmoment-, drehwinkel- oder streckgrenzengesteuerten Anziehverfahren.

Ebenso ist mit der DSS-Mutter und -schraube eine hundertprozentige Überwachung aller Verschraubungen bzw. Garnituren im Tragwerksbau möglich.

### **6.3 Schrauben-Freilauf-Prüfstand**

Für die Untersuchung der Übertragungsfähigkeit von stirnseitig befestigten Freiläufen wurde im Zuge der Bachelorarbeit von SCHERM ([Sch14]) ein entsprechender Prüfstand entworfen. Dieser Prüfstand wurde bereits in Abb. 5.2 in Kapitel 5 kurz gezeigt. Der Prüfstand ist für ein maximales Moment von 6 kNm ausgelegt.



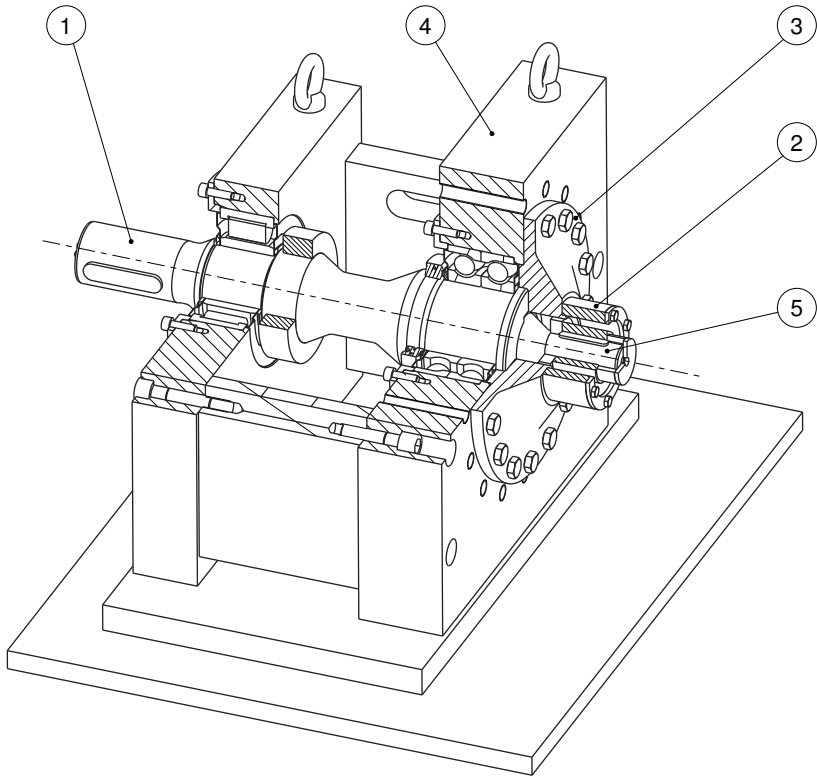


Abb. 6.22: Zusammenbauzeichnung des Prüfaufbaus für Rutsch- und Scherversuche an stirnseitig befestigten Freiläufen mit Teilausschnitt

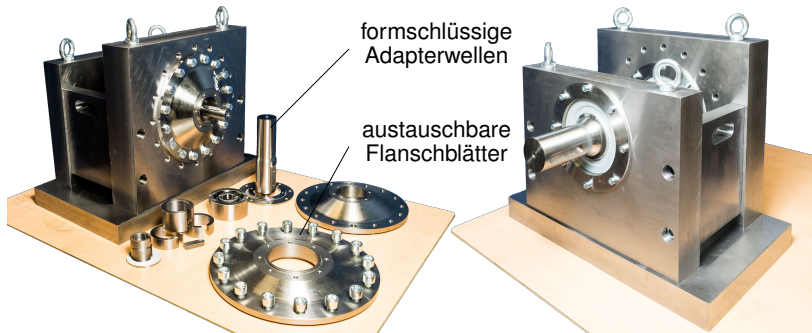


Abb. 6.23: Prüfaufbau für Rutsch- und Scherversuche an stirnseitig befestigten Freiläufen

Der eigentliche Prüfaufbau ist in Abb. 6.22 als Zusammenbauzeichnung dargestellt. Der Aufbau besteht aus einer prüflingsseitig spindelgelagerten Hauptwelle (1), welche mit einer DMS-Messstelle zur Messung der Drehmomente der stirnseitig befestigten Freilauf-Flansch-Verbindung versehen ist. Der zu prüfende Freilauf (2) ist stirnseitig an ein austauschbares Flanschblatt (3) angeschraubt, über deren Austausch z.B. eine einfache Anpassung des Prüfstands an verschiedene zu untersuchende Prüflinge möglich ist. Die Adapterblätter sind hierbei über eine entsprechend überdimensionierte stirnseitige Mehrschraubenverbindung mit dem Festlagerbock (4) verbunden, so dass es zuerst zu einem Rutschen in der zu untersuchenden stirnseitigen Freilauf-Flansch-Verbindung kommt und die sekundäre stirnseitige Verbindung zwischen Flansch und Festlagerbock die zu prüfenden Momente sicher kraftschlüssig überträgt. Die Hauptwelle selbst ist prüflingsseitig mit einer formschlüssigen Adaptierung versehen, die als Passfederverbindung mit zwei gegenüberliegenden Passfedern ausgeführt ist. Über die Adapterwellen (5) wird eine schnelle Anpassung des Prüfstands an verschiedene Prüflinge ermöglicht.

Der ausgeführte Prüfaufbau mit formschlüssigen Adapterwellen und austauschbaren Flanschblättern ist in Abb. 6.23 gezeigt. Dieser Prüfaufbau wurde noch um eine Belastungseinrichtung, welche aus einer gelagerten Welle mit Hebel besteht, erweitert. Über diese kann z.B. durch einen Hydraulikzylinder das erforderliche Drehmoment von bis zu 6 kNm zur Belastung der stirnseitigen Freilauf-Flansch-Verbindung eingeleitet werden. Um hierbei eine querkraftfreie Übergabe des Drehmoments von der Belastungseinrichtung auf den eigentlichen Prüfaufbau zu er-

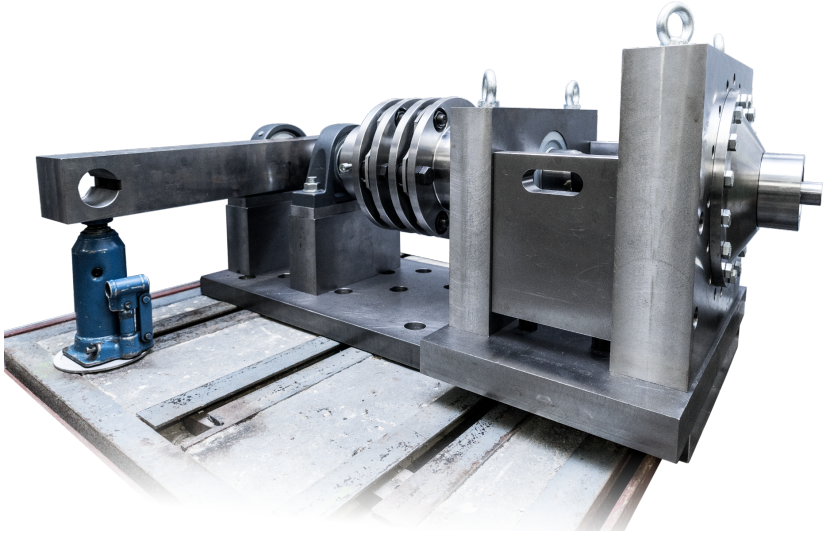


Abb. 6.24: Prüfstand für Rutsch- und Scherversuche an stirnseitig befestigten Freiläufen mit Belastungseinrichtung und Kupplung

möglichen, ist eine Stahllamellenkupplung zwischen den beiden Prüfstandsteilen verbaut worden. Der Prüfstand für Rutsch- und Scherversuche an stirnseitig befestigten Freiläufen, bestehend aus dem eigentlichen Prüfaufbau mit Messwelle und stirnseitiger Befestigung sowie der Belastungseinrichtung mit Hebel und Kupplung, ist in Abb. 6.24 nochmals dargestellt.

## 6.4 Experimenteller Nachweis der behinderten radialen Aufweitung

Die nachfolgend beschriebenen Versuche wurden auf dem obig beschriebenem Prüfstand für Rutsch- und Scherversuche an stirnseitig befestigten Freiläufen durchgeführt. Vor Versuchsbeginn wurden die Kontaktflächen zwischen dem Freilaufaußenring aus 16MnCr5 (bei allen Prüflingen) und dem entsprechenden Anschlussflansch aus 42CrMo4 mit Isopropanol gereinigt und entfettet. Anschließend wurden die vorbereiteten DMS-Messschrauben derart eingesetzt, dass sie zu keiner Seite hin mit der Durchgangsbohrung in Anlage waren. Dies ist erforderlich,

Tab. 6.6: Schraubenvorspannungen der sechs DMS-Messschrauben (Sechskantschrauben ISO 4014 - M6x60 - 8.8) am Freilauf *Modell 1* nach dem Anziehen mit 75 % der maximal zulässigen Schraubenvorspannung

Schraube		1	2	3	4	5	6	$\Delta$ in %
Vorspannung in N	V1	6.658	6.677	6.780	6.810	6.750	6.771	−0,13
	V2	6.549	6.645	6.512	6.680	6.757	6.614	−1,84

damit bei den Versuchen ein detektierbares Durchrutschen der zu untersuchenden stirnseitigen Verbindung überhaupt möglich ist.

Teile dieser Versuche wurden bereits im Zuge einer Veröffentlichung [Hof17] des Autors beschrieben, weshalb Teile der nachfolgenden und vorhergehenden Abschnitte dieses Kapitels maßgeblich auf dieser Veröffentlichung aufbauen.

#### 6.4.1 Rutschversuche zum Nachweis der relativen Übertragbarkeit

Bei den durchgeführten Versuchen zeigte sich eine gute Einstellbarkeit der Schraubenvorspannung durch die Verwendung der DMS-Messschrauben aus Abschnitt 6.2. Für die ersten Rutschversuche am Freilauf *Modell 1* wurde z.B. eine Sollvorspannung pro Schraube von 6,75 kN gewählt, was 75 % der maximal zulässigen Schraubenvorspannung für die sechs verwendeten Sechskantschrauben ISO 4014 - M6x60 - 8.8 entspricht. Die erreichten Vorspannungen nach dem Anziehen sowie die Abweichung der Gesamtvorspannkraft vom Sollwert sind in Tab. 6.6 für zwei durchgeführte Versuche (V1 und V2) aufgeführt. Bei beiden Versuchen zeigte sich eine Abweichung von der Gesamtsollvorspannung in der Schraubenverbindung von kleiner 2 %. Dies jedoch exklusive der Messunsicherheit in den gemessenen Einzelvorspannungen der DMS-Messschrauben selbst.

Nach dem Vorspannen der stirnseitigen Verschraubung wurde über die Belastungseinrichtung, genauer über einen am Hebel der Belastungseinrichtung angreifenden Hydraulikzylinder ein Drehmoment in die Verbindung eingeleitet und so lange erhöht, bis es zum Rutschen der Verbindung kam. Das Rutschen wurde hierbei durch einen auf eine magnetische Messfahne am Außendurchmesser des Freilaufaußenrings gerichteten laseroptischen Wegsensors erfasst. Der entsprechende Messaufbau mit einem stirnseitig über DMS-Messschrauben befestigten Prüfling vom Typ Freilauf *Modell 1* ist in Abb. 6.25 dargestellt.

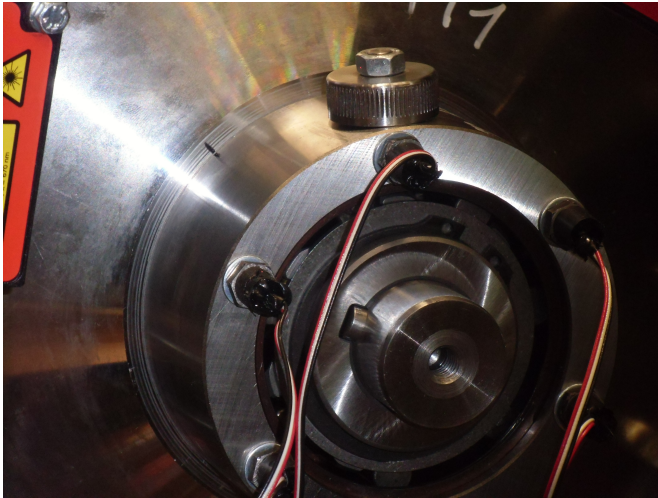


Abb. 6.25: Messaufbau für Rutschuntersuchungen am stirnseitig befestigten Freilauf *Modell 1* mit magnetischer Messfahne, laseroptischer Wegmesseinrichtung zur Erfassung des Rutschwegs und DMS-Messschrauben mit Unterlegscheiben und vergossenen Anschlussdrähten

Abb. 6.26 zeigt beispielhaft die Verläufe des gemessenen Drehmoments und des Rutschwegs eines der durchgeführten Rutschversuche am Freilauf *Modell 1*, bei dem die sechs DMS-Messschrauben ISO 4014 - M6x60 - 8.8 mit 75 % der maximal zulässigen Vorspannkraft angezogen wurden. Es ist zu erkennen, dass es bei diesem Versuch zu einem erstmaligen Rutschen der Verbindung bei einem Rutschmoment von 507,9 Nm kam. Eine weitere Steigerung des Drehmoments führte zu einem Nachrutschen der Verbindung, wobei das Rutschmoment mit jedem Weiterrutschen anstieg, bis es ab ca. 750 Nm zu einem deutlich reduzierten weiteren Rutschen innerhalb der stirnseitigen Verbindung und ab ca. 1 kNm zu keinerlei Weiterrutschen mehr kam. Die Drehmomentbelastung wurde anschließend bis auf ca. 1,2 kNm weiter erhöht und danach die Verbindung wieder vollständig entlastet.

Die verringerte Zunahme im Rutschweg ab ca. 750 Nm kann darüber erklärt werden, dass ab diesem Zeitpunkt eine oder bereits auch mehrere Schrauben einseitig in ihrer Durchgangsbohrung in Anlage geraten waren. Ab ca. 1 kNm waren dementsprechend alle Schrauben in Anlage geraten und ein weiteres Rutschen der Verbindung war nicht mehr möglich.

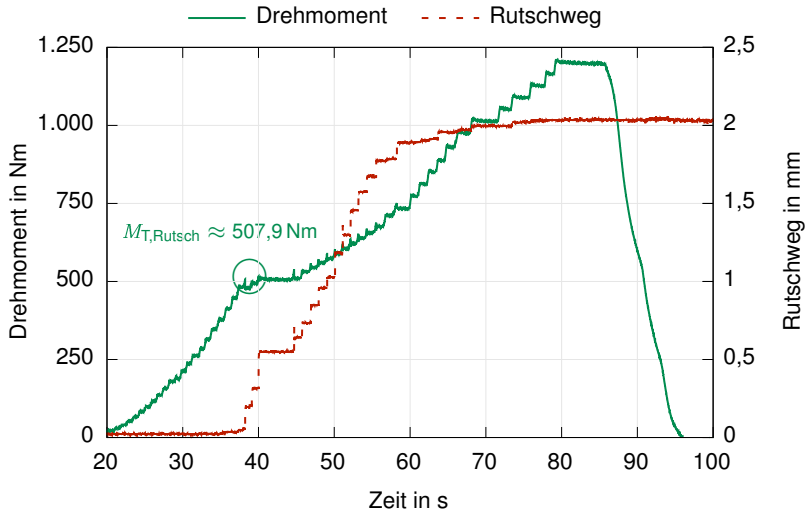


Abb. 6.26: Rutschversuch mit Freilauf *Modell 1* - Prüfling P05 bei 75 % Vorspannung und Schrauben der Festigkeitsklasse 8.8 (2. Wiederholung)

Weiterhin ist die schrittweise Erhöhung der Rutschmomente nach jedem Rutschvorgang zwischen dem ersten Rutschen bei 507,9 Nm und ca. 750 Nm interessant und kann als Anzeichen für ein Trainieren der Oberflächen bzw. des Reibkontakts gesehen werden. Die Erhöhung des Reibwerts bei mehrmaligem aufeinanderfolgenden Rutschen in dieser Materialkombination konnte auch bereits bei den in Abschnitt 6.1 beschriebenen Reibwertuntersuchungen beobachtet werden.

Aus der bei der Montage der  $z_S$  Schrauben<sup>1</sup> eingestellten Vorspannung  $F_{SV}$ <sup>2</sup>, dem Lochkreis  $d_T$  des Freilaufs<sup>3</sup> und dem im Versuch ermittelten Rutschmoment  $M_{T,Rutsch}$  kann ein Haftreibwert  $\mu$  nach folgender Gleichung errechnet werden.

$$\mu = \frac{2 \cdot M_{T,Rutsch}}{d_T \cdot F_{SV} \cdot z_S} \approx 0,288 \quad (6.2)$$

Dieser Wert stimmt relativ gut mit den am Reibprüfstand ermittelten Reibwerten in Tab. 6.2 überein.

Aufbauend auf den bereits beschriebenen Versuch wurden weitere Rutschversu-

<sup>1</sup>Hier  $z_S = 6$ .

<sup>2</sup>In diesem Fall  $\approx 6,75$  kN pro Schraube.

<sup>3</sup>Für das *Modell 1* beträgt dieser 87 mm.

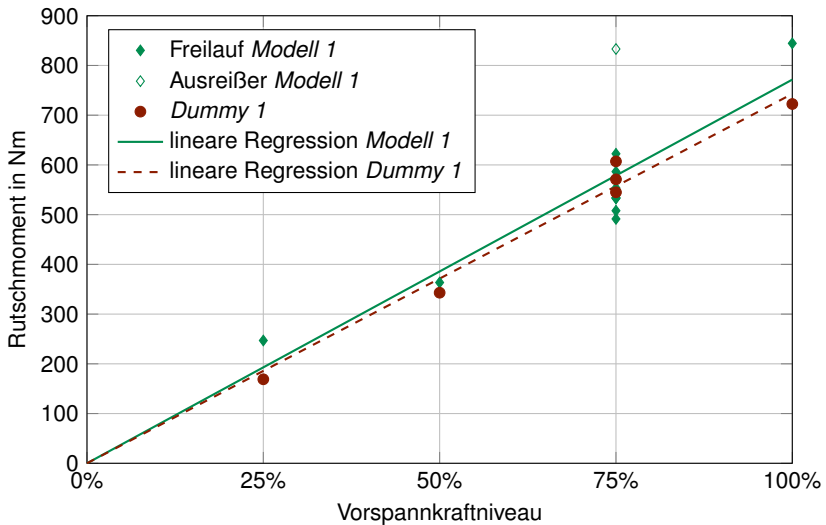


Abb. 6.27: Rutschmomente für Freilauf *Modell 1* und *Dummy 1* auf vier verschiedenen Vorspannkraftniveaus (25 %, 50 %, 75 % und 100 %)

che am Freilauf *Modell 1* und dem zugehörigen *Dummy 1* durchgeführt. Die Vorgehensweise bei diesen Versuchen entsprach der bereits beschriebenen. Die Versuche wurden auf vier Vorspannkraftniveaus (25 %, 50 %, 75 % und 100 %) der maximal zulässigen Vorspannung der verwendeten Sechskantschrauben ISO 4014 - M6x60 - 8.8<sup>4</sup> angestellt, wobei auf dem 75 %-Niveau mehrere Versuchswiederholungen zur besseren Absicherung der aus den Versuchspunkten zu bestimmenden mittleren Regressionsgerade durchgeführt wurden. Aus den durchgeführten Rutschversuchen ergibt sich das in Abb. 6.27 gezeigte Ergebnisdiagramm.

Auf dem 75 %-Niveau gibt es einen Ausreißer (◊), welcher mit einem ermittelten Rutschmoment von ca. 833 Nm deutlich höher als die anderen Rutschmomente auf diesem Vorspannkraftniveau liegt. Bei diesem Versuch waren nach dem Anziehen der Schrauben bereits eine oder eventuell auch mehrere Schrauben bereits in Anlage geraten, weshalb zum einen ein spätes und gegenüber den anderen Versuchen deutlich verkürztes Rutschen in diesem Versuch auftrat. Die Anlage mehrerer Schrauben bestätigte sich bei der Demontage des Prüflings, weshalb dieser Versuchspunkt im Folgenden nicht weiter betrachtet und ausgewertet wird.

<sup>4</sup>In diesem Fall beträgt die maximal zulässige Schraubenvorspannung 9 kN.

Die insgesamt 9 Versuche mit dem Freilauf *Modell 1* (♦) auf dem 75 %-Niveau zeigten eine deutliche Streuung der ermittelten Rutschmomente, wobei der Mittelwert auf diesem Vorspannkraftniveau bei ca. 544,8 Nm lag.

Die 3 Versuche mit dem *Dummy 1* (●) auf dem 75 %-Niveau zeigten eine ähnliche Streuung der Rutschmomente, bei einem Mittelwert von ca. 574,4 Nm. Die Streuung in den ermittelten Rutschmomenten ist wohl hauptsächlich auf den streuenden Haftreibwert in der stirnseitigen Verbindung zurückzuführen.

In Abb. 6.27 sind für den Freilauf *Modell 1* und den *Dummy 1* über lineare Regressionen Ausgleichsgeraden bestimmt worden. Diese wurden unter der Randbedingung berechnet, dass bei 0 % Vorspannung auch kein Rutschmoment übertragen werden kann (dementsprechend gilt auf diesem Vorspannkraftniveau für das Rutschmoment = 0 Nm). Es ist zu erkennen, dass die Ausgleichsgerade für den *Dummy 1* (---), welcher keine radial aufweitenden Kräfte erfährt, sogar leicht unterhalb der Ausgleichsgerade des entsprechenden Freilaufs *Modell 1* (—), der wiederum zusätzlich zu den Dummies mit den aufweitenden Klemmnormalkräften belastet ist, liegt.

Diese Beobachtung scheint dem in Kapitel 4 aufgestellten analytischen Modell und der dahinterstehenden Theorie der behinderten radialen Aufweitung auf den ersten Blick zu widersprechen. Die Versuche ohne radiale Aufweitung wurden jedoch am Prüfling *Dummy 1* P01 durchgeführt, welcher bei den ermittelten Reibwerten mit einem mittleren Wert von  $\overline{\mu_{D1,P01}} \approx 0,237$  einen deutlich geringeren Haftreibwert als der Freilauf *Modell 1* mit  $\overline{\mu_{M1,A}} \approx 0,269$  aufwies (vergleiche Unterabschnitt 6.1.4).

Werden ausgehend von dieser Beobachtung die ermittelten Rutschmomente des *Dummy 1* auf den Reibwert des Freilaufs *Modell 1*, also einen einheitlichen Reibwert, um, so ergeben sich die in Abb. 6.28 dargestellten reibwertangepassten Versuchspunkte für den *Dummy 1*\* (■). Die reibwertangepasste Ausgleichskurve des Dummies (---) ohne radial aufweitende Kräfte liegt nun, wie erwartet, oberhalb der Ausgleichskurve des entsprechenden Freilaufs, welcher zusätzlich zu dem Drehmoment von den radial aufweitenden Klemmnormalkräften belastet ist.

Die sich ergebenden Mittelwerte für den Freilauf *Modell 1* ( $\overline{M_{T, Freilauf}}$ ) und den reibwertangepassten *Dummy 1*\* ( $\overline{M_{T, Dummy*}}$ ) sind mit dem Vertrauensbereich der durchgeführten Rutschversuche für ein Konfidenzniveau von 95 % seitlich nach rechts aus den Rutschpunkten des 75 %-Vorspannkraftniveaus heraus dargestellt.



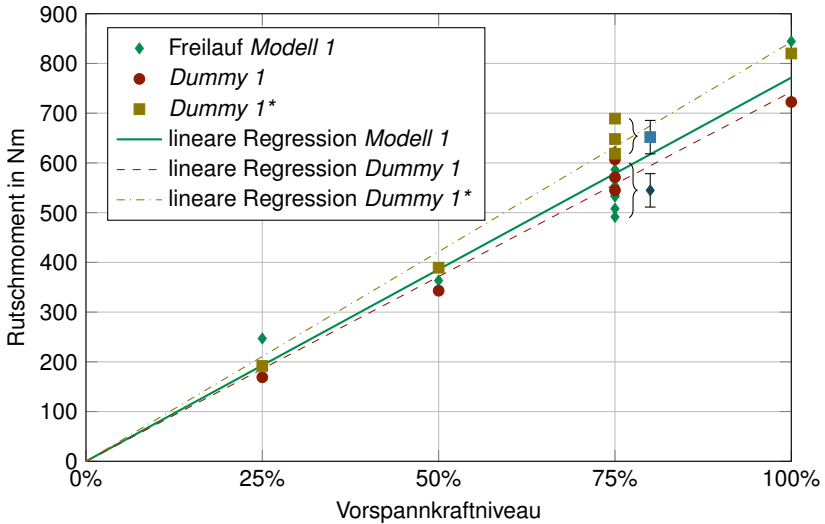


Abb. 6.28: Rutschmomente für Freilauf *Modell 1*, *Dummy 1* und reibwertangepassten *Dummy 1\** auf vier verschiedenen Vorspannkraftniveaus (25 %, 50 %, 75 % und 100 %)

Daraus ist ersichtlich, dass es sich bei der Reduktion der Reibwerte auf diesem Vorspannkraftniveau um einen statistisch signifikanten Effekt handelt. Dieser Effekt beschreibt den Einfluss der radial aufweitenden Kräfte (Klemmnormalkräfte im Freilauf) auf die Grenzen der kraftschlüssig übertragbaren Drehmomente (Rutschgrenze) am stirnseitig befestigten Freilauf. Es ergibt sich folglich eine Reduktion der Rutschgrenze infolge der im Freilauf prinzipbedingt wirkenden radialen Kräfte. Die Tatsache, dass sich die Rutschgrenze reduziert, stimmt mit der Vorhersage durch die bisherig aufgestellte Theorie überein. Rechnerisch ergibt sich für die Reduktion  $\beta_R$  der mittleren Rutschmomente demnach in diesem Fall ein Wert von

$$\beta_R = \frac{\overline{M_{T, \text{Freilauf}}}}{\overline{M_{T, \text{Dummy}}}} = \frac{\overline{M_{T, \text{Freilauf}}}}{\frac{\mu_{M1,A}}{\mu_{D1,P01}} \cdot \overline{M_{T, \text{Dummy}}}} \approx \frac{544,8 \text{ Nm}}{\frac{0,269}{0,237} \cdot 574,4 \text{ Nm}} \approx 0,836 \quad (6.3)$$

Aus dem Mittelwert der Rutschmomente des Dummy 1 ( $\overline{M_{T, \text{Dummy}}}$ ) auf dem 75%-Vorspannkraftniveau kann ebenfalls nach Gleichung 6.2 ein mittlerer Haftreibwert berechnet werden. Für diesen ergibt sich ein Wert von ca. 0,326. Dieser Wert ist deutlich höher als der auf dem Reibprüfstand des IMW ermittelte Wert (verglei-

che Unterabschnitt 6.1.4). Nach [Grä15] sind die wirkenden Reibwerte von Belastungsart und -richtung sowie der Anordnung der Oberflächenstrukturen der beiden Kontaktpartner zueinander abhängig. In den dort durchgeführten Versuchen ergaben sich z.B. bei durch eine Querkraft belasteten Reibpartnern (vergleichbar mit der Belastung am Reibprüfstand des IMW) deutlich geringere Reibwerte als bei der Belastung mit einem Torsionsmoment (siehe hierzu Abb. 6.29). Die ermittelten Unterschiede für die Kontaktpartner aus 42CrMo4 in Selbstpaarung stimmen sehr gut mit den sich hier ergebenden Unterschieden zwischen dem ermittelten Reibwert am Reibprüfstand ( $\overline{\mu_{D1,P01}} \approx 0,237$ ) und dem aus den Versuchsergebnissen berechneten theoretisch während der Versuche wirkenden Reibwert überein. Der Anschlussflansch bestand bei den im Zuge dieser Arbeit durchgeführten Versuchen ebenfalls aus 42CrMo4, während die Freilaufaußenringe und Dummies aus 16MnCr5 gefertigt waren.

## 6.4.2 Messung der radialen Aufweitung

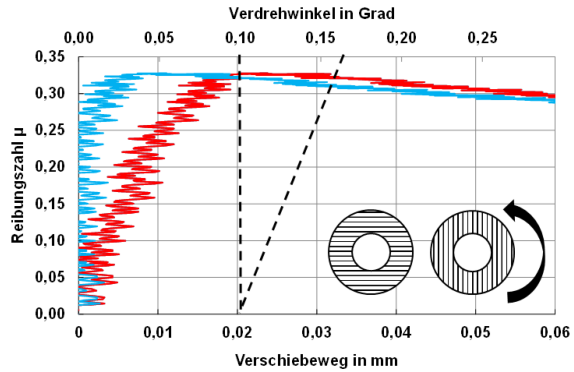
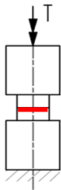
Um eine Einschätzung der Genauigkeit der in Kapitel 5 beschriebenen Methoden zur Abschätzung der radialen Zusatzkräfte zu ermöglichen, wurde die radiale Aufweitung von stirnseitig befestigten Freiläufen im Versuch gemessen und mit den berechneten bzw. simulierten Aufweitungsverläufen verglichen.

Um die reale Aufweitung der Prüflinge zu messen, wurden diese auf dem Schrauben-Freilauf-Prüfstand aus Abschnitt 6.3 stirnseitig befestigt und die Außenkontur des Freilaufaußenrings vor Aufweitung entlang der Wellenachse mit einem Rauheitsmessgerät (mit Freitaster im Tastschnittverfahren) gemessen. Anschließend wurde der Prüfling mit einem konstanten Drehmoment belastet und die radial aufgeweitete Außenkontur entlang der Wellenachse erneut gemessen. Abb. 6.30 zeigt beispielhaft die Messung der Außenkontur an einem Prüfling vom Typ *Modell 2*.

Da das verwendete Rauheitsmessgerät nicht originär zur Konturmessung vorgesehen ist, geht die absolute Höheninformation beim erneuten Anfahren des Startpunkts der Messung leider verloren. Die relativen Höhen über dem axialen Weg des Freilaufaußenrings können jedoch ausgewertet werden. Die ungefilterten Rohsignale vor und nach Aufweitung wurden nun am Startpunkt der Messung übereinander gelegt und die gemessene Außenkontur vor der Aufweitung durch das

a)

Torsion



b)

Querkraft

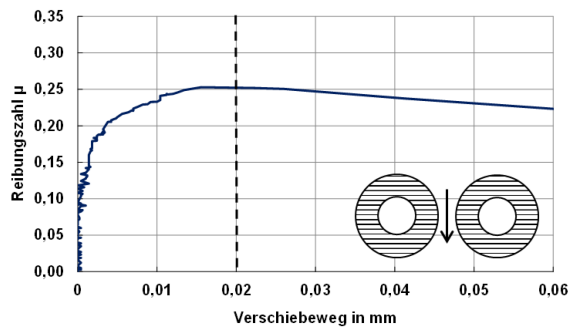
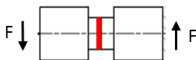


Abb. 6.29: Einfluss der Belastungsrichtung auf die Reibwerte geschliffener Oberflächen in Selbstpaarung (42CrMo4) (aus [Grä15])

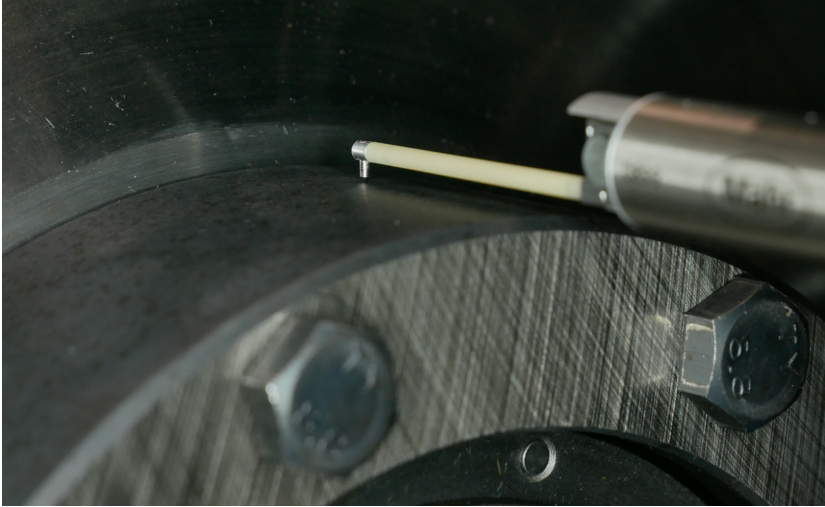


Abb. 6.30: Messung der Außenkontur mit einem Rauheitstaster an einem stirnseitig befestigten Freilauf *Modell 2*

konstante Drehmoment von der aufgeweiteten Kontur abgezogen. Anschließend wurde dieses Signal noch über einen gleitenden Mittelwert geglättet. In Abb. 6.31 ist die aus der Differenz von vor und nach der Aufweitung infolge der Klemmnormalkräfte gemessenen Außenkonturen  $u$  und die über den gleitenden Mittelwert geglättete radiale Aufweitung  $\bar{u}$  beispielhaft für einen Aufweitungsversuch am Freilauf *Modell 1* dargestellt.

Es ist zu erkennen, dass bei diesem Versuch mit einem Drehmoment von 230 Nm eine maximale Aufweitungsdifferenz über die Breite des Freilaufaußenrings  $b_{AR}$  in Höhe von ca.  $6\ \mu\text{m}$  gemessen wurde. Weiterhin betrug der Aufweitungsunterschied zwischen der rechten (freien) Seite und der Seite der stirnseitigen Befestigung (links) in diesem Fall ca.  $3\ \mu\text{m}$ . Die Vermutung, dass der Freilaufaußenring durch die stirnseitige Befestigung in seiner freien radialen Ausdehnung behindert wird, bewahrheitet sich hier deutlich. Weiterhin wird deutlich, dass die bisherige Annahme kleiner Verzerrungen (siehe Kapitel 3) ebenfalls gerechtfertigt war.

Über den bekannten Klemmwinkelverlauf des jeweiligen Prüflings kann die bei dem entsprechenden Prüfmoment von in diesem Fall 230 Nm wirkende Gesamtklemmnormalkraft  $F_{NK}$  bestimmt werden. Wird für diese Klemmnormalkraft und die im

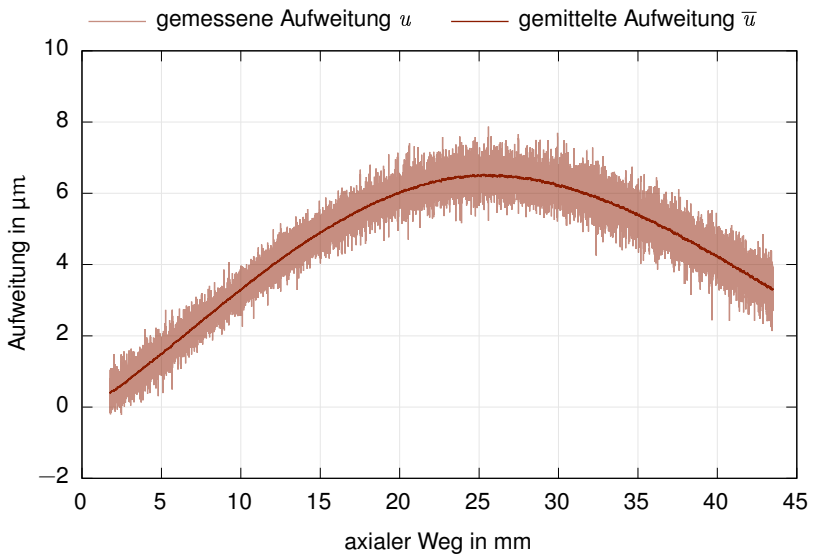


Abb. 6.31: Am Freilauf *Modell 1* gemessene Aufweitung und über gleitenden Mittelwert geglätteter Verlauf der Aufweitung bei einem Drehmoment von 230 Nm

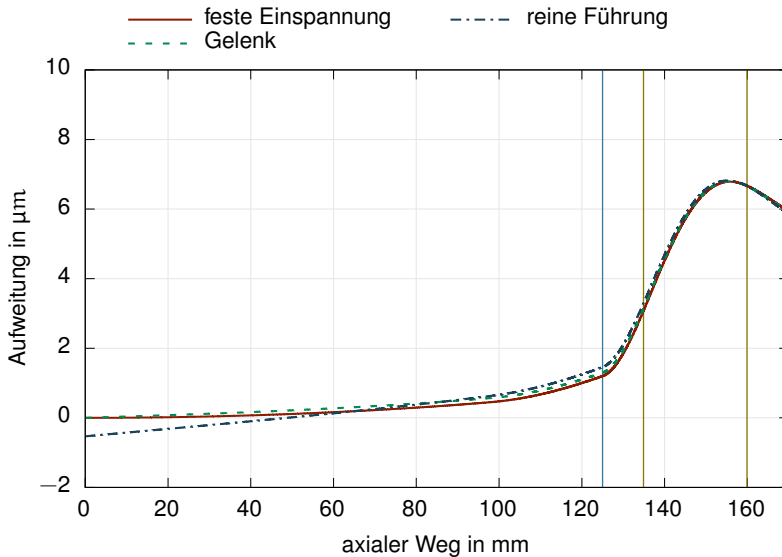


Abb. 6.32: Mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechnete Aufweitungsverläufe für den stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf *Modell 1* für die drei möglichen Einspannbedingungen des letzten Flanschkörpers in Abb. 5.30

Versuch vorliegende Geometrie<sup>5</sup> die Aufweitung des Freilaufaußenrings über das kombinierte Kreisring-Schalenmodell für die drei möglichen Einspannbedingungen des letzten Flanschkörpers berechnet, so ergeben sich für den aus fünf Ersatzkörpern bestehenden Flansch aus Abb. 5.30 die in Abb. 6.32 dargestellten Aufweitungsverläufe.

Der von den Klemmnormalkräften aufgeweitete Klemmbereich  $b_K$  liegt in Abb. 6.32 zwischen 134,9 mm und 159,9 mm und ist mit **farblichen Linien** begrenzt. Ebenso ist der der Breite des Freilaufaußenrings  $b_{AR}$  entsprechende Bereich zwischen 125 mm und 168,8 mm durch **andersfarbige Linien** in Abb. 6.32 abgegrenzt.

In dieser Abbildung ist der Einfluss der Einspannung bzw. Lagerung des letzten Flanschkörpers ( $\text{FL}_5$ ) in Abb. 5.30 zu erkennen. Dieser ist zum einen, wie nach den Ergebnissen aus Abschnitt 5.5 zu erwarten, im Bereich des Freilaufaußenrings

<sup>5</sup>In diesem Versuch lag der Klemmbereich  $b_K$  nicht exakt in der Mitte des Freilaufaußenrings, sondern um 0,5 mm zum freien Ende hin verschoben.

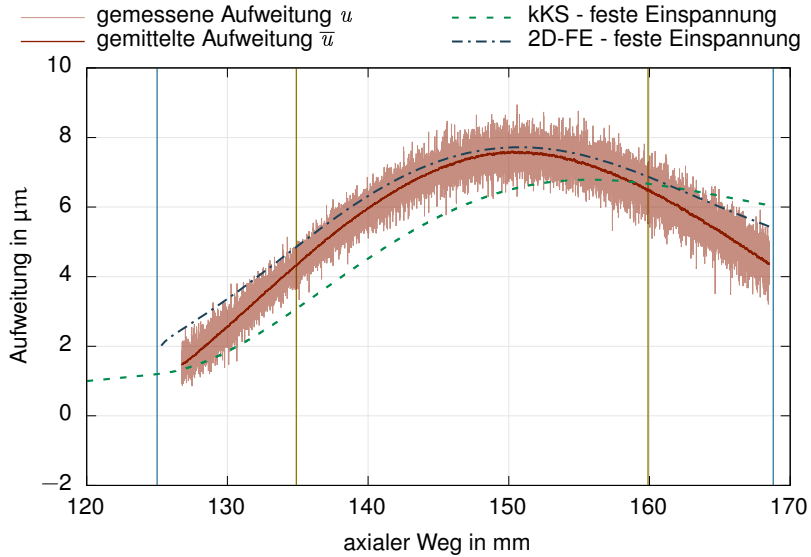


Abb. 6.33: Mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneter Aufweitungsverlauf für den stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf *Modell 1* und eine feste Einspannung des letzten Flanschkörpers in Abb. 5.30 im Vergleich zum gemessenen Aufweitungsverlauf

recht gering. Und zum anderen wird der Unterschied zwischen einer reinen Führung, bei der die hinteren Flanschkörper auch nach „Innen“ ausweichen können, und einer gelenkigen Einspannung, bei der am Einspannpunkt keine radiale Verschiebung möglich ist ( $u = 0$ ), sowie einer festen Einspannung, bei der zusätzlich noch keine Verdrehung am Einspannpunkt möglich ist ( $u' = 0$ ), gut sichtbar.

Werden die mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneten Aufweitungsverläufe aus Abb. 6.32 mit dem gemessenen Verlauf aus Abb. 6.31 in bestmögliche Übereinstimmung gebracht, so ergeben sich die Abb. 6.33 bis 6.35. Für die Bestimmung der bestmöglichen Übereinstimmung wurde der geglättete Verlauf der gemessenen Aufweitung in radialer Richtung solange verschoben, bis sich die geringste Summe der quadratischen Abstandsquadrate (Methode der kleinsten Abstandsquadrate) zwischen dem gemessenen und berechneten Aufweitungsverlauf ergab. In den Abb. 6.33 bis 6.35 sind weiterhin die Aufweitungsverläufe der Außenseite des Freilaufaußenrings aus den entsprechenden 2D-FE-Modellen mit dargestellt.

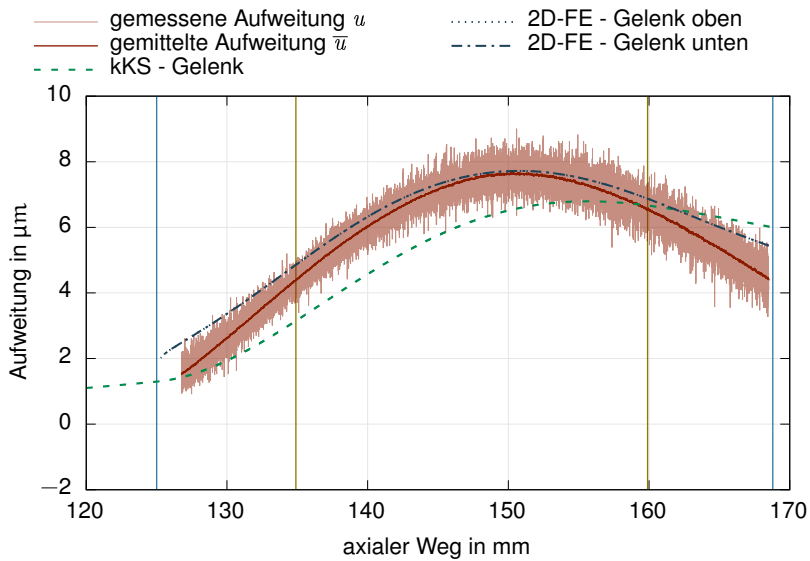


Abb. 6.34: Mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneter Aufweitungsverlauf für den stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf *Modell 1* und eine gelenkige Lagerung des letzten Flanschkörpers in Abb. 5.30 im Vergleich zum gemessenen Aufweitungsverlauf



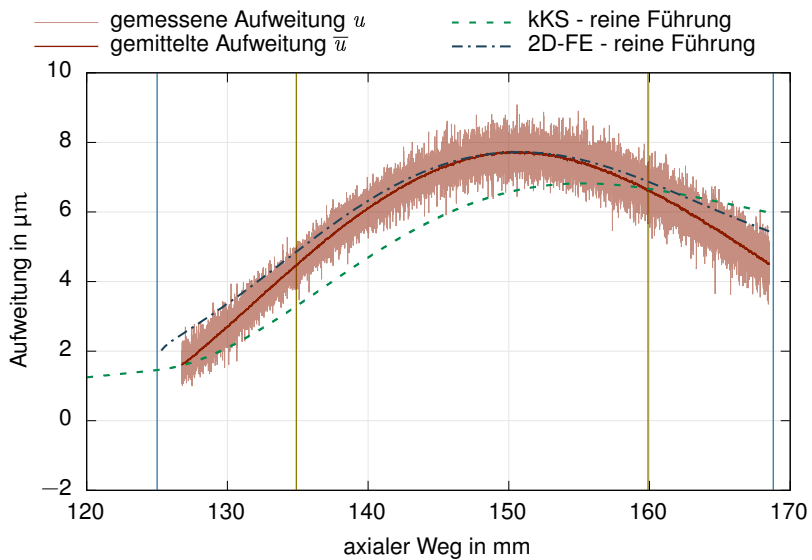


Abb. 6.35: Mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneter Aufweitungsverlauf für den stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf *Modell 1* und eine reine Führung des letzten Flanschkörpers in Abb. 5.30 im Vergleich zum gemessenen Aufweitungsverlauf

Die beste Übereinstimmung zwischen dem gemessenen und dem mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneten Verlauf ergibt sich bei einer angenommenen reinen Führung des letzten Flanschkörpers mit einer summierten quadratischen Abweichung<sup>6</sup> von  $0,177 \text{ mm}^2$ . Dieser Lagerungsfall kommt der Realität in diesem Fall wohl auch am nächsten. Die zweitbeste Übereinstimmung ergibt sich mit  $0,203 \text{ mm}^2$  bei einer angenommenen gelenkigen Lagerung des letzten Flanschkörpers im kombinierten Kreisring-Schalenmodell und die schlechteste Übereinstimmung mit einem Wert von  $0,218 \text{ mm}^2$  ergibt sich bei einer angenommenen festen Einspannung dieses Körpers. Vergleichbares ergab sich auch bei weiteren durchgeführten Aufweitungsmessungen am Freilauf *Modell 1* und den anderen zur Verfügung gestandenen Prüflingen nach Tab. 6.1.

Aus dem Vergleich der Aufweitungsverläufe ist weiterhin zu erkennen, dass die mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneten Verläufe die Aufweitungsbehinderung durch den stirnseitig befestigten Flanschkörper zu stark bewerten und somit zu einem deutlich zur freien Seite des Freilaufaußenrings verschobenen Maximum in der Aufweitung führen. Die Größenordnung der berechneten und gemessenen Aufweitungen stimmt jedoch gut überein, was auf eine grundsätzlich plausible Berechnung hindeutet.

Die sich aus den 2D-FE-Simulationen ergebenden Aufweitungsverläufe zeigen eine grundsätzlich bessere Übereinstimmung mit dem gemessenen Verlauf. Die in den Randbereichen gegenüber der gemessenen Aufweitung größeren Aufweitungen in den 2D-FE-Modellen sind vermutlich – zumindest zu einem Teil – auf die allen Berechnungen und Simulationen zugrunde liegende Vereinfachung eines partiell über die Klemmbreite  $b_K$  angreifenden Innendruck zurückzuführen. In der Realität wird sich ein zu den Enden des Klemmbereichs abfallender Verlauf des Innendruckes ergeben, dies wird noch zusätzlich durch die Bombierung der Klemmrollen in diesem Fall unterstützt. In der Berechnung und in der Simulation ist jedoch ein konstant über die Klemmbreite wirkender Innendruck angenommen worden. Die ansonsten gute Übereinstimmung zwischen dem Ergebnis der Simulation und dem gemessenen Aufweitungsverlauf weist jedoch darauf hin, dass die Berücksichtigung der in der Realität diskret an den einzelnen Klemmstellen angreifenden Klemmnormalkräfte über einen äquivalenten Innendruck in Simulation und Berechnung eine zulässige Vereinfachung darstellt.

---

<sup>6</sup>Die berechneten Werte für die Summe der quadratischen Abweichungen haben keine anschauliche Bedeutung und sind nur zur Einordnung der relativen Abweichungen zwischen den verschiedenen gerechneten Varianten gedacht.

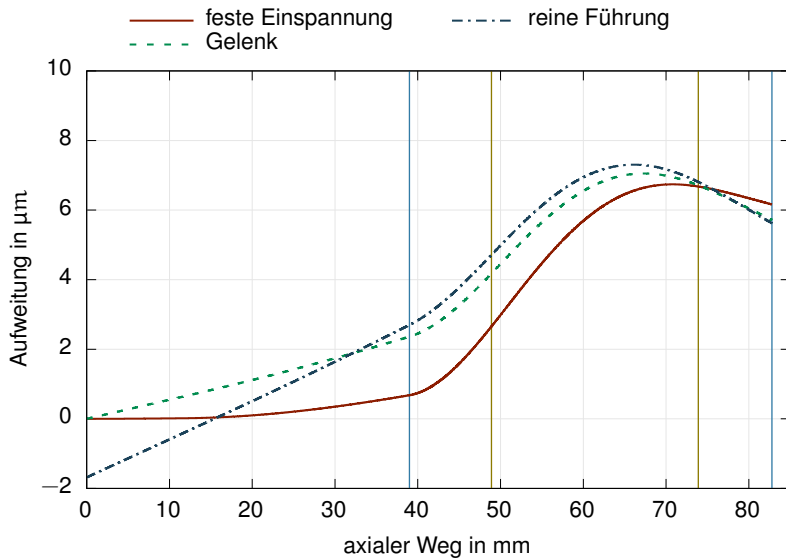


Abb. 6.36: Mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell ohne Berücksichtigung des Lagerbocks berechnete Aufweitungsverläufe für den stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf *Modell 1* für die drei möglichen Einspannbedingungen des letzten Flanschkörpers

Werden die Ergebnisse der Berechnung und Simulation des stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilaufs *Modell 1* unter Vernachlässigung des Festlagerbocks analog ausgewertet, so ergeben sich die in den Abb. 6.36 bis 6.39 dargestellten Verläufe.

Die mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell ohne Berücksichtigung des Festlagerbocks in Abb. 5.3 berechneten Aufweitungsverläufe zeigen den Einfluss der angenommenen Lagerbedingung bzw. Einspannsituation des letzten Flanschkörpers nochmals deutlicher als bei dem Modell mit Festlagerbock (vergleiche Abb. 6.32).

Der Verlauf für eine feste Einspannung des letzten Flanschkörpers weist hier mit einem Wert von  $0,318 \text{ mm}^2$  die mit Abstand schlechteste Übereinstimmung zwischen der gemessenen und der berechneten Aufweitung auf. Es ist ersichtlich, dass durch die Nähe zum Einspannpunkt sich die unendlich biegesteife Einspannung stark auf das Ergebnis der Berechnung auswirkt.

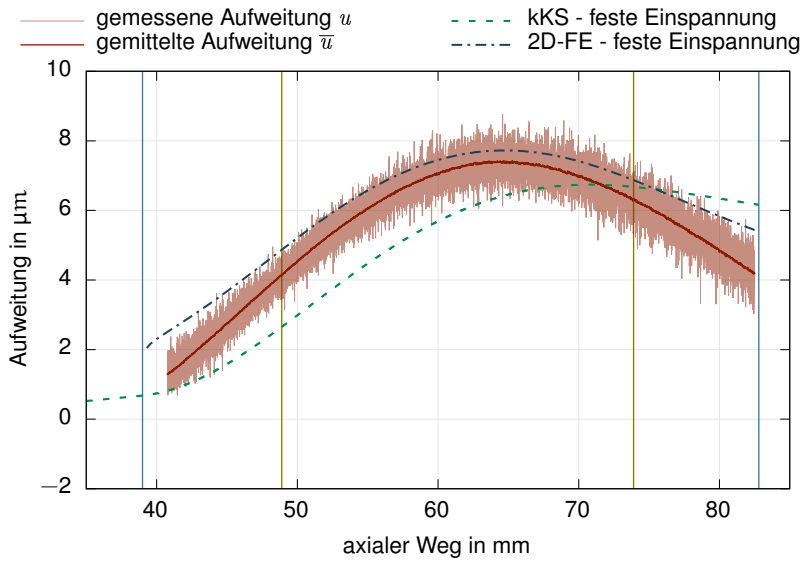


Abb. 6.37: Mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell ohne Berücksichtigung des Lagerbocks berechneter Aufweitungsverlauf für den stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf *Modell 1* und eine feste Einspannung des letzten Flanschkörpers im Vergleich zum gemessenen Aufweitungsverlauf

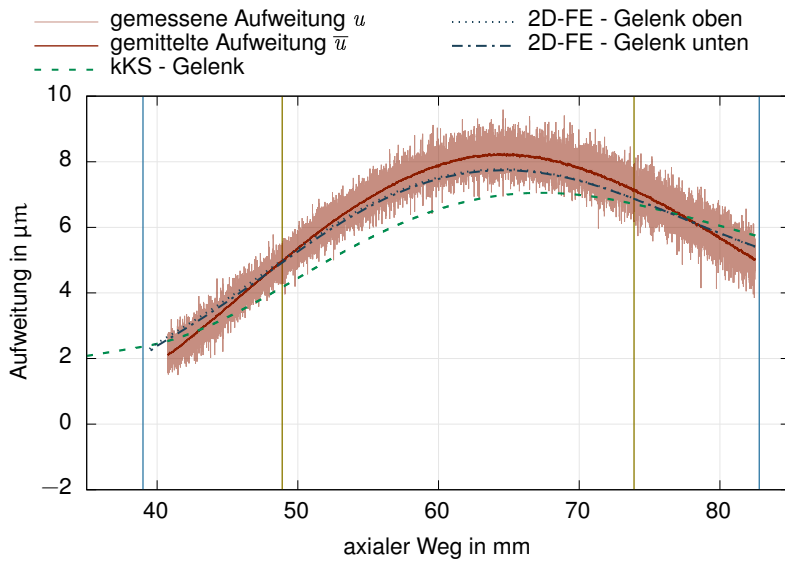


Abb. 6.38: Mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell ohne Berücksichtigung des Lagerbocks berechneter Aufweitungsverlauf für den stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf *Modell 1* und eine gelenkige Lagerung des letzten Flanschkörpers im Vergleich zum gemessenen Aufweitungsverlauf

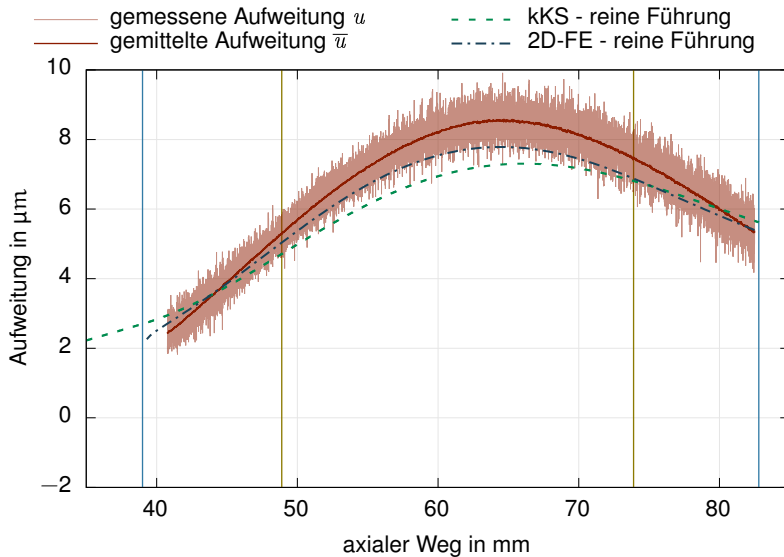


Abb. 6.39: Mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell ohne Berücksichtigung des Lagerbocks berechneter Aufweitungsverlauf für den stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf *Modell 1* und eine reine Führung des letzten Flanschkörpers im Vergleich zum gemessenen Aufweitungsverlauf

Für eine angenommene gelenkige Lagerung des letzten Flanschkörpers ( $\text{FL}_3$  in Abb. 5.30) des stirnseitigen Freilauf-Flansch-Verbunds ergibt sich wiederum mit  $0,071 \text{ mm}^2$  eine bessere Übereinstimmung als mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell mit Festlagerbock. Wie bereits bei diesem Modell, so liefert auch bei dem Modell ohne den Festlagerbock eine reine Führung des letzten Flanschkörpers die beste Übereinstimmung zwischen dem gemessenen und berechneten Aufweitungsverlauf (in diesem Fall betrug die Summe der quadratischen Abweichungen  $0,043 \text{ mm}^2$ ).

Aus den Ergebnissen der Aufweitungsversuche kann gefolgert werden, dass die sich mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell ergebenden Steifigkeiten bei den untersuchten Freilauf-Flansch-Kombinationen tendenziell zu hoch sind. Dies führt auch zu der bereits bemerkten Überschätzung der sich ergebenden Kräfteverhältnisse. Für eine Abschätzung der relativen Übertragbarkeiten mit dem kom-



Abb. 6.40: Abgeschnittene Schrauben nach dem Scherversuch am Freilauf *Modell 1* (erreichtes Schermoment von 2,88 kNm)

binieren Kreisring-Schalenmodell sollte deshalb eine „weiche“ Lagerung (reine radiale Führung (A)) angenommen werden, um der Überschätzung der radialen Steifigkeiten entgegenzuwirken.

## 6.5 Scherversuch am Freilauf *Modell 1*

Neben den Rutschversuchen und Versuchen zur Aufweitung wurde ebenfalls ein Scherversuch am Freilauf *Modell 1* durchgeführt. Bei diesem Versuch wurden Sechskantschrauben ISO 4014 - M6x60 - 8.8 verwendet, welche vor Versuchsbeginn mit 6,75 kN (also 75 % der maximalen Vorspannkraft) angezogen waren. Weiterhin war an der Verbindung vor dem Scherversuch bereits der in Abb. 6.26 (siehe Unterabschnitt 6.4.1) gezeigte Rutschversuch durchgeführt worden.

Die Verbindung hatte durch ein Abscheren der Schrauben am Übergang vom verschraubten zum unverschraubten Gewinde versagt. Die abgeschnittenen Schrauben sowie der nach dem Abscheren der Schrauben „losgebrochene“ Freilauf sind in Abb. 6.40 gezeigt. Im mittleren kleinen Bildausschnitt ist der noch in der Gewindebohrung steckende Teil einer Schraube mit einem Pfeil markiert.

Unter Berücksichtigung der in [Tho84] angegebenen Werte hatte die untersuchte Verbindung eine theoretische Scherfestigkeit von ca. 1,36 kNm und versagte im Ver-

Abb. 6.41: Scherversuch mit Freilauf *Modell 1* - Prüfling P05

such erst bei 2,88 kNm. Der Verlauf von Drehmoment und Rutschweg (gemessen über die Messfahne) ist in Abb. 6.41 dargestellt. Zu erkennen ist, dass ab ca. 2,5 kNm der gegen die Messfahne gemessene Weg zunahm. Gleichzeitig wurde die Zunahme des Drehmoments mit jedem Pumpenhub geringer. Dies spricht dafür, dass ab diesem Zeitpunkt die plastische Verformung der Schrauben begann. Da die Schrauben wohl bereits aus dem vorhergehenden Versuch komplett in Anlage waren, kam es während des Versuchs zu keinem weiteren „echten“ Rutschen der Verbindung.

Der durchgeführte Scherversuch zeigt, dass die stirnseitig befestigten Freiläufe bei einer formschlüssigen Belastung der Schrauben eine ausreichende Reserve zur Übertragung von statischen Sonder- und Überlasten besitzen.



## 7 Gestaltungshinweise

Wie bereits beschrieben, ist es mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell möglich die Kräfteverhältnisse  $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$  und somit auch die zu erwartenden relativen Übertragbarkeiten  $\beta_R$  verschiedener Konstruktionsvarianten schnell gegeneinander zu vergleichen. Durch die der Schalentheorie zugrunde liegende – im Gegensatz zur Methode der Finiten Elemente – auf Ebene der betrachteten Körper anschauliche Berechnung, ist es weiterhin möglich, sich den Einfluss der Hauptgeometriegrößen aus Abb. 5.18 zu verdeutlichen. Dadurch ist die Ableitung von Gestaltungshinweisen für den Entwurf eines stirnseitig befestigten Freilauf-Flanschs-Verbund mit einer größtmöglichen zu erwartenden relativen Übertragbarkeit möglich.

### **Wie sieht ein hinsichtlich der relativen Übertragbarkeit optimierter Freilaufaußenring aus?**

Da der Innendurchmesser  $d_{AR}$  des Freilaufaußenrings direkt mit dem durch den Freilauf zu übertragenden Drehmoment verknüpft ist, wird dieser im Folgenden als fest vorgegeben angesehen. Ebenso ist der Außendurchmesser  $D_{AR}$  durch den Freilaufhersteller zwar so berechnet, dass ein optimaler Betrieb des Freilaufs gewährleistet ist. Hierbei muss zum einen beachtet werden, dass die ertragbare Flächenpressung infolge eines dicken Außenrings nicht überschritten wird. Zum anderen darf es bei einem dünnen Außenring nicht zum Aufreißen infolge zu hoher Ringspannungen kommen.

Betrachtet man den bereits aus Abb. 5.30 bekannten stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf *Modell 1* und setzt alle Geometriemaße bis auf den Freilaufaußendurchmesser  $D_{AR}$  fest und untersucht anschließend die Abhängigkeit der mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneten Kräfteverhältnisse vom Freilaufaußenring-Außendurchmesser, so ergeben sich die in

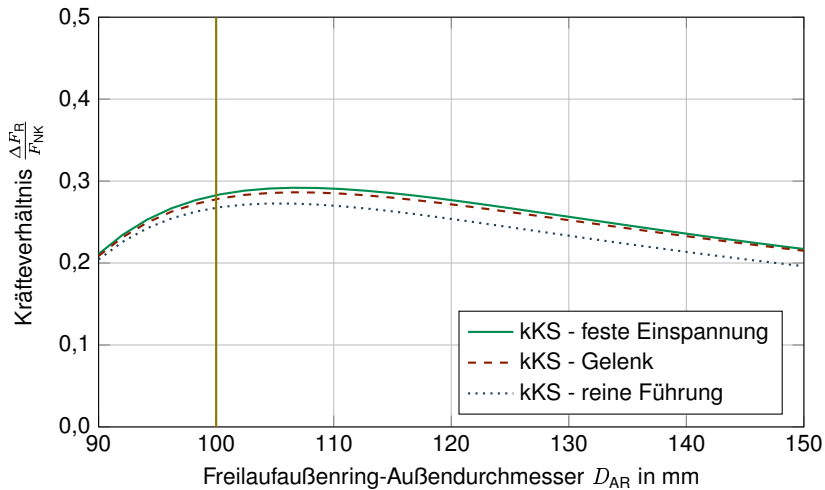


Abb. 7.1: Verlauf der mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneten Kräfteverhältnisse bei Variation des Außendurchmessers  $D_{AR}$  des Außenrings des stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilauf *Modell 1*

Abb. 7.1 dargestellten Verläufe.

Ein Außendurchmesser deutlich kleiner 90 mm ist beim Freilauf *Modell 1* mit einem Innendurchmesser des Freilaufaußenrings von  $d_{AR} = 75$  mm schon allein deshalb nicht sinnvoll, da noch Durchgangsbohrungen für die Schrauben der stirnseitigen Befestigung im Freilaufaußenring untergebracht werden müssen.

Mit steigendem Außendurchmesser<sup>1</sup> steigt das zu erwartende Kräfteverhältnis erst noch einmal an, bevor es dann wie zu erwarten mit Annäherung des Freilaufaußenring-Außendurchmessers an den Außendurchmesser des angrenzenden Flanschkörpers<sup>2</sup> zu einer Reduktion des Kräfteverhältnisses und somit zu einer Steigerung der relativen Übertragbarkeit kommt.

Interessanterweise führt eine leichte Reduzierung des Außendurchmessers des Freilaufaußenrings in diesem Fall zu einem deutlich geringeren Kräfteverhältnis, was einer deutlichen Erhöhung der relativen Übertragbarkeit entspricht. In diesem Fall scheint demnach ein etwas „dünnerer“ Außenring bezüglich der relativen Über-

<sup>1</sup>Der Freilauf *Modell 1* weist einen Nennaußendurchmesser von 100 mm auf.

<sup>2</sup>In diesem Fall der Körper  $FL_1$  in Tab. 5.1 bzw. in Abb. 5.30 mit einem Außendurchmesser von 157,5 mm.

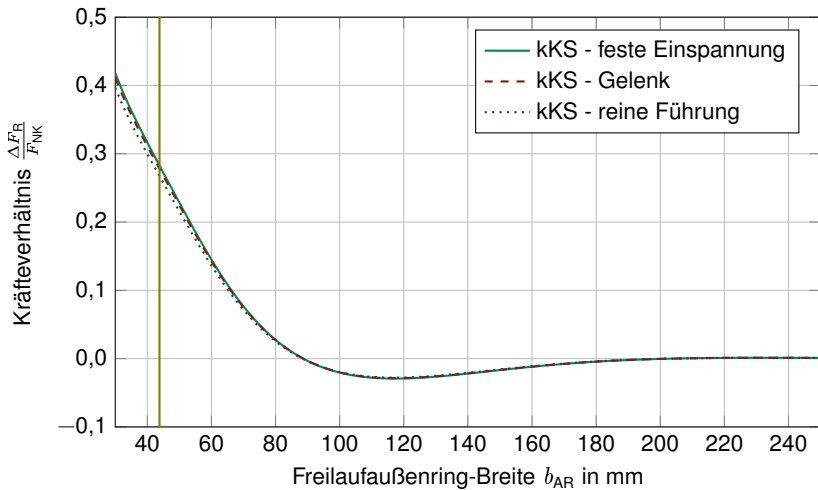


Abb. 7.2: Verlauf der mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneten Kräfteverhältnisse bei Variation der Breite  $b_{AR}$  des Außenrings des stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilaufs *Modell 1*

tragbarkeit der stirnseitigen Befestigung besser zu sein.

Werden nun entsprechend dem bisherigen Vorgehen alle Geometrie Größen abgesehen von der Breite  $b_{AR}$  des Freilaufaußenrings konstant gehalten und nur dieser Wert variiert, so ergeben sich die in Abb. 7.2 gezeigten Verläufe. Die Klemmbreite  $b_K$  wurde mit 25 mm ebenfalls konstant gehalten und weiterhin immer mittig innerhalb der Breite des Freilaufaußenrings gelegen angenommen.

Wie zu erwarten steigt das Kräfteverhältnis mit geringer werdender Breite<sup>3</sup> des Freilaufaußenrings an und nimmt mit größer werdender Breite ab. Dies liegt vor allem an dem zunehmenden Abstand  $z_r$  (siehe z.B. Abb. 5.18) zwischen Krafteinleitung und stirnseitiger Befestigung. Über diesen breiten unbelasteten Bereich kann sich die Aufweitung infolge der Klemmnormalkräfte abbauen und somit kaum noch für eine radiale Zusatzkraft in der Reibfuge der stirnseitigen Befestigung sorgen. Bemerkenswerterweise ergibt sich aus dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell für die Variation der Breite des Freilaufaußenrings ein erster Nulldurchgang in den berechneten Kräfteverhältnissen bei einer Breite von ca. 88,5 mm. Wird die Breite über diesen Wert weiter gesteigert, dreht sich die Richtung der radialen Zusatzkraft

<sup>3</sup>Die Nennbreite des Außenrings des Freilaufs *Modell 1* beträgt  $b_{AR} = 43,8$  mm.

$\Delta F_R$  um und es kommt – zumindest rechnerisch – zu einer Rückfederung an der stirnseitigen Befestigung, bevor ab einer Breite von ca. 200 mm die Störung des Membranzustands infolge der nur partiell über die Breite  $b_K$  angreifenden Klemmnormalkräfte vollständig abgeklungen ist.

Für den Kehrwert  $\lambda$  der charakteristischen Länge der Schale gilt nach Gleichung (3.53) in diesem Fall:

$$\lambda = \frac{\sqrt[4]{3 \cdot (1 - \nu^2)}}{\sqrt{r_S \cdot H}} = \frac{\sqrt[4]{3 \cdot (1 - 0,3^2)}}{\sqrt{43,75 \text{ mm} \cdot 12,5 \text{ mm}}} \approx 0,055 \frac{1}{\text{mm}} \quad (7.1)$$

Für den Abstand  $z_r$  zwischen Klemmbereich und stirnseitiger Befestigung gilt nach Gleichung (5.14) in diesem Fall:

$$z_r = \frac{b_{AR} - b_K}{2} \quad (7.2)$$

Bei einer Breite des Außenrings von 200 mm ergibt sich demnach ein Abstand von  $z_r = 87,5 \text{ mm}$  und dieser Wert liegt mit  $\lambda \cdot z_r \approx 4,8$  deutlich über dem Wert 4, ab dem von einer langen Schale nach Unterabschnitt 3.5.3 gesprochen werden kann.

Aus dem Verlauf des Kräfteverhältnisses kann für den Freilauf *Modell 1* auch der Verlauf der relativen Übertragbarkeit  $\beta_R$  nach Gleichung (4.11) in Abhängigkeit von der Breite des Freilaufaußenrings bestimmt werden. Den entsprechenden Verläufen in Abb. 7.3 liegt der Klemmwinkel des Freilaufs *Modell 1* bei einem Drehmoment von 230 Nm zugrunde.

Infolge des Nulldurchgangs im Kräfteverhältnis ergibt sich eine maximale relative Übertragbarkeit von  $\beta_R = 1$  bereits bei einer Breite von  $b_{AR} \approx 88,5 \text{ mm}$ . Inwiefern es exakt bei dieser Breite zu einer reinen Drehmomentübertragung in der Reibfuge der stirnseitigen Befestigung kommt, ist zwar zu prüfen. Dennoch gibt es wohl einen optimalen Abstand  $z_r$  für jede mögliche Freilauf-Flansch-Kombination, bei der die relative Übertragbarkeit maximal wird. Generell sollte für eine hohe relative Übertragbarkeit ein möglichst großer Abstand  $z_r$  gewählt werden. Dieser Abstand kann auch einseitig am Freilauf konstruktiv vorgesehen werden.

Vergleichbares ergibt sich auch bei der Variation der entsprechenden Geometrie-Größen der Freilaufaußenringe der anderen Freilaufotypen *Modell 2* bis *Modell 4*.

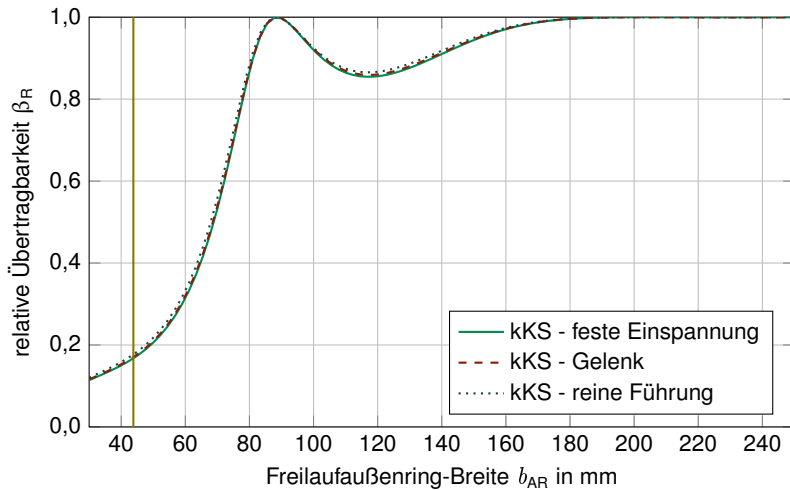


Abb. 7.3: Verlauf der mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneten relativen Übertragbarkeit bei Variation der Breite  $b_{AR}$  des Außenrings des stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilaufs *Modell 1* bei einem Drehmoment von 230 Nm

### Wie sieht eine hinsichtlich der relativen Übertragbarkeit optimierte Anschlussgeometrie aus?

Ist der Freilauf nun in seinem gesamten Aufbau fest vorgegeben, so kann immer noch der Anschlussflansch bzw. die Anschlussgeometrie so angepasst werden, dass sich eine möglichst hohe relative Übertragbarkeit ergibt.

In den Abb. 7.4 bis 7.6 sind die sich mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell ergebenden Kräfteverhältnisse bei Variation der Hauptgeometriegrößen des unmittelbaren Anschlusskörpers ( $\text{FL}_1$  in Abb. 5.30) des stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilaufs *Modell 1* gezeigt.

Aus der Variation des Innen- und Außendurchmessers ist zu erkennen, dass eine optimale relative Übertragbarkeit erreicht wird, wenn die Innen- und Außendurchmesser des Freilaufaußenrings und des Anschlusskörpers jeweils übereinstimmen. Bei real ausgeführten Konstruktionen ist es in der Regel erforderlich, eine Zentrierung vorzusehen, weshalb die exakt gleichen Durchmesser in der Regel nicht erreicht werden können. Aus Abb. 7.5 ist jedoch ersichtlich, dass die Variation des

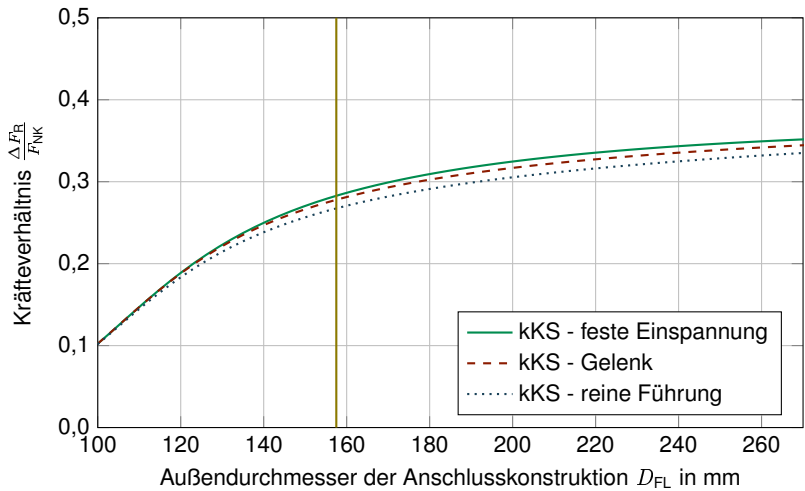


Abb. 7.4: Verlauf der mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneten Kräfteverhältnisse bei Variation des Außendurchmessers  $D_{FL}$  der unmittelbaren Anschlussgeometrie des stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilaufs *Modell 1*

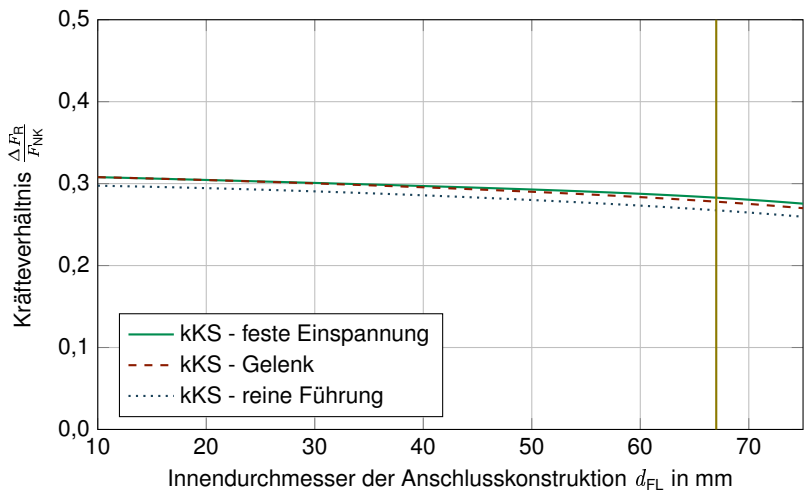


Abb. 7.5: Verlauf der mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneten Kräfteverhältnisse bei Variation des Innendurchmessers  $d_{FL}$  der unmittelbaren Anschlussgeometrie des stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilaufs *Modell 1*

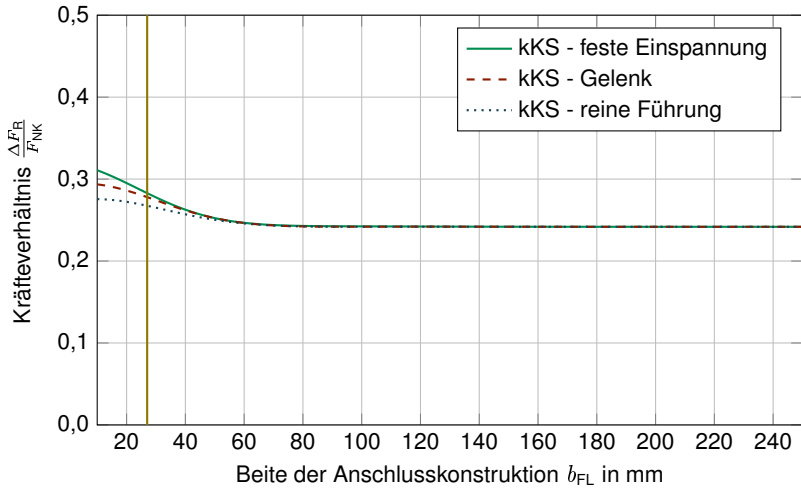


Abb. 7.6: Verlauf der mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell berechneten Kräfteverhältnisse bei Variation der Breite  $b_{FL}$  der unmittelbaren Anschlussgeometrie des stirnseitig am Schrauben-Freilauf-Prüfstand befestigten Freilaufs *Modell 1*

Innendurchmessers der Anschlusskonstruktion keinen so großen Einfluss auf das sich ergebende Kräfteverhältnis hat, wie die Variation des Außendurchmessers in Abb. 7.4. Aus diesem Grund sollte, sofern erforderlich, eine Innenzentrierung<sup>4</sup> für den stirnseitig befestigten Freilauf vorgesehen werden und der Außendurchmesser der unmittelbaren Anschlusskonstruktion dem Außendurchmesser des Freilaufaußenrings entsprechen.

Bei einer Variation der Breite  $b_{FL}$  des Anschlusskörpers scheint bei allen untersuchten Freiläufen (*Modell 1* bis *Modell 4*) eine Breite von  $b_{FL} \approx \frac{2}{\lambda(FL_1)}$  für eine maximale relative Übertragbarkeit zu sorgen.

Die Gestaltungshinweise für eine bezüglich der relativen Übertragbarkeit  $\beta_R$  optimierten Freilauf-Flansch-Konstruktion sind in Abb. 7.7 zusammenfassend noch einmal dargestellt.

<sup>4</sup>Eine Innenzentrierung hat bei stirnseitiger Befestigung noch den weiteren Vorteil, dass es nicht zu einer zusätzlichen Belastung des Außenrings bzw. des Zentrierbunds infolge einer radialen Dehnungsbehinderung kommt.

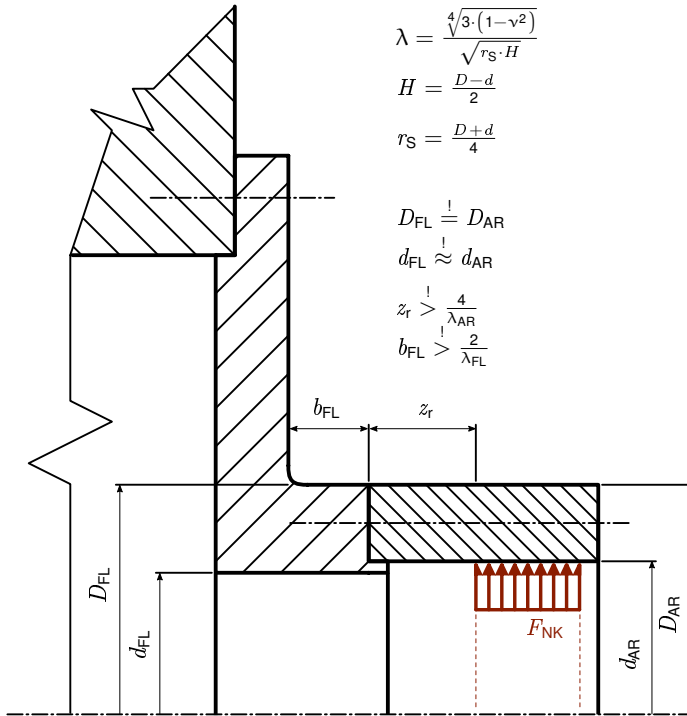


Abb. 7.7: Hinweise für eine optimale Gestaltung eines stirnseitig befestigten Freilaufs und seiner unmittelbaren Anschlusskonstruktion



---

### **Was ist weiterhin bei der Konstruktion einer stirnseitigen Befestigung für einen Freilauf zu beachten?**

Um möglichste große formschlüssigen Reserven der stirnseitigen Mehrschraubenverbindung des stirnseitig befestigten Freilaufs zu erhalten, sollten die Mindestabstände nach [VDI14a] (siehe Tab. 2.1 in Unterabschnitt 2.2.1) von  $3 \cdot d_h$  zwischen den einzelnen Schrauben eingehalten werden.

Da weiterhin die bisher betrachteten radialen Zusatzkräfte und die durch das stirnseitig zu übertragende Drehmoment wirkenden Umfangskräfte die Belastung der stirnseitigen Reibfuge darstellen und der Haftreibwert im stirnseitigen Kontakt quasi für die Beanspruchbarkeit steht, sollte natürlich, sofern es durch konstruktive Maßnahmen möglich ist, ein hoher Reibwert in der Verbindung sichergestellt werden.



## 8 Zusammenfassung

Im Zuge dieser Arbeit wurde mit dem Modell aus Kapitel 4 erstmalig eine anschauliche Beschreibung der hinter der Reduktion der kraftschlüssigen Übertragbarkeit stehenden Mechanismen ermöglicht. Die Reduktion der kraftschlüssigen Übertragbarkeit in der stirnseitigen Befestigung eines Freilaufs wurde auf radiale Zusatzkräfte zurückgeführt, die infolge des Ausgleichs der ungleichen radialen Aufweitungen der stirnseitig miteinander verbundenen Körper des Freilaufaußenrings und des Anschlussflanschs entstehen. Für die Gesamtverbindung der stirnseitigen Befestigung wurde über die Vorstellung des Reibkegels ein analytischer Zusammenhang in Gleichung (4.11) zwischen dem ohne und mit Berücksichtigung dieser radialen Zusatzkräfte stirnseitig kraftschlüssig übertragbaren Drehmomenten aufgestellt.

In Kapitel 5 wurden verschiedene Methoden zur Abschätzung dieser radialen Zusatzkräfte vorgestellt und untersucht. In Abschnitt 5.1 wurden die Einflüsse verschiedener möglicher Vereinfachungen im Modellaufbau entsprechender FE-Modelle zur Bestimmung der radialen Zusatzkräfte untersucht und gezeigt, dass ein vereinfachter Modellaufbau mit einem 2D-FE-Modell mit Verbundkontakten eine zulässige Vereinfachung darstellt und somit als Referenzmethode für die Bestimmung des Kräfteverhältnisses aus radialer Zusatzkraft in der Reibfuge bezogen auf die ursächlichen Klemmnormalkräfte anzusehen ist. Die Nutzung der FEM erfordert jedoch spezielle Programme, die in der Regel kostenpflichtig sind und durch die vielfältigen Einstellmöglichkeiten auch viele mögliche Quellen für Anwenderfehler bieten.

Als anschauliche und schnelle Berechnungsmethode für die hinter dieser Reduktion stehenden radialen Zusatzkräfte in der Reibfuge wurde daher das kombinierte Kreisring-Schalenmodell aus Abschnitt 5.3 entwickelt. In diesem wurde der Verbund aus Freilaufaußenring und Flansch durch Schalenkörper, genauer rotations-symmetrische Zylinderschalen, beschrieben. Hierbei ist der Verbund an jeder Stelle aufzuteilen, an der sich entweder die Belastung oder die Geometrie unstetig

ändert. Zur Verbesserung der Abschätzung des Kräfteverhältnisses wurde das ursprüngliche Scheiben-Schalenmodell um dünne Kreisringscheiben (siehe Unterabschnitt 5.3.2) an den Querschnittsübergängen erweitert. Diese wirken wie Kraftübersetzungsglieder, die anschaulich die unterschiedlichen Radien der Mittelflächen ausgleichen können. Anschaulich erfahren die beiden über eine stirnseitige Mehrschraubenverbindung verbundenen Körper des Freilaufaußenrings und des Anschlussflanschs unterschiedliche Membranverformungen, welche über entsprechende wirkende Radialkräfte und Momente in der Trennfuge (durch den Biegezustand der Rotationsschale) in Einklang gebracht werden müssen. Abschließend können über das Kraftgrößenverfahren aus dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell die radiale Zusatzkraft und damit wiederum die relative Übertragbarkeit rechnerisch abgeschätzt werden.

Die Ergebnisse des elastomechanischen kombinierten Kreisring-Schalenmodells wurden mit den Ergebnissen entsprechender 2D-FE-Modelle verglichen und hierbei zeigte sich, dass das kombinierte Kreisring-Schalenmodell sehr gut geeignet ist, verschiedene Konstruktionsvarianten bezüglich ihres Einfluss auf die relative Übertragbarkeit schnell untereinander zu vergleichen. Eine gegenüber entsprechender FE-Modelle ausreichend genaue Abschätzung der Kräfteverhältnisse bzw. der relativen Übertragbarkeiten ist mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell ebenfalls möglich. Hierbei führt das kombinierte Kreisring-Schalenmodell eher zu einer Überschätzung der infolge der behinderten radialen Aufweitung entstehenden Zusatzkräfte, was einer eingebauten zusätzlichen Sicherheit entspricht. In einigen Fällen ist jedoch auch eine Unterschätzung der radialen Zusatzkräfte um bis zu 10 % möglich, weshalb empfohlen wird, die mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell ermittelten Kräfteverhältnisse mit einem entsprechenden Sicherheitsfaktor von ca. 1,1 zu multiplizieren.

Weiterhin wurde in Abschnitt 5.5 am Beispiel eines real an einem Prüfstand befestigten Freilaufs gezeigt, wie vorgegangen werden sollte, um das Kräfteverhältnis mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell abzuschätzen. Die den Flansch in Abb. 1.6 repräsentierenden Körper werden aus Zylinderschalen angenähert, wobei an jedem Querschnittswechsel eine dünne Kreisringscheibe mit einer Breite von 0,1 mm eingefügt wird.<sup>1</sup> Ebenso zeigte sich, dass für die Abschätzung des Kräfteverhältnisses mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell eine „weiche“ Lagerung wie z.B. eine reine Führung für die Lagerbedingung des letzten Flan-

---

<sup>1</sup> Natürlich reduziert sich dadurch die Breite der Zylinderschale um diese 0,1 mm.

schersatzkörpers gewählt werden sollte.

Die in Kapitel 6 beschriebenen Untersuchungen hatten das Ziel, die aufgestellte Theorie der behinderten radialen Aufweitung die Verfahren zur Abschätzung der relativen Übertragbarkeit  $\beta_R$  bzw. Kräfteverhältnisse  $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$  zu validieren. Hierzu wurde der in Abschnitt 6.3 beschriebene Schrauben-Freilauf-Prüfstand zur Untersuchung von stirnseitig befestigten Freiläufen genutzt. Auf diesem wurden Rutschversuche (vgl. Unterabschnitt 6.4.1) an stirnseitig befestigten Freiläufen und an entsprechenden Dummies – also Körpern, die die gleichen Ab- und Anschlussmaße wie der entsprechende Freilauf besitzen, aber keine Freilauffunktion ermöglichen (siehe Unterabschnitt 6.1.2) – durchgeführt, um den Einfluss der behinderten radialen Aufweitung auf die Drehmomentübertragungsfähigkeit des stirnseitig befestigten Freilaufs zu untersuchen. In diesen Versuchen konnte der die Drehmomentübertragung reduzierende Einfluss der behinderten radialen Aufweitung gezeigt werden. In den Versuchen zeigte sich jedoch auch, dass der Reibwert in der stirnseitigen Verbindung einen erwartungsgemäß großen Einfluss auf das übertragbare Drehmoment hat.

Für die Auswertung der durchgeführten Rutschversuche wurden Reibversuche an den untersuchten Freiläufen und Dummies durchgeführt. Unter anderem zeigte sich in diesen Versuchen (siehe Abschnitt 6.1), dass bei trockenen Kontaktflächen zwischen den Freilaufaußenringen aus 16MnCrS5 und den Flanschkörpern aus 42CrMo4 Reibwerte von mindestens 0,21 zu erwarten sind. Des Weiteren wurde ein dehnungsgestütztes Verfahren zur Messung der Schraubenvorspannung (siehe Abschnitt 6.2) für die Untersuchungen genutzt und weiterentwickelt.

Es sei noch angemerkt, dass die Schwankung des Reibwerts Größenordnungen annehmen kann, die die Wirkung der behinderten radialen Aufweitung übersteigen. Jedoch mindert dies nicht die Wirksamkeit des mit dieser Arbeit nun vorhandenen Modells und der Methoden zur Abschätzung der relativen Übertragbarkeit des stirnseitig befestigten Freilaufs. Das Gegenteil ist der Fall. Der Reibwert stellt die Seite der Beanspruchbarkeit für die kraftschlüssige Verbindung dar, während das zu übertragende Drehmoment zusammen mit dem damit verknüpften Kräfteverhältnis  $\frac{\Delta F_R}{F_{NK}}$  die Beanspruchung darstellt. Gerade bei einer großen Schwankung der Beanspruchbarkeit ist demnach eine genaue Kenntnis der Beanspruchung zur sicheren Auslegung der Verbindung erforderlich.

Um die Genauigkeit der Rechenmodelle im Bezug zu den realen Verhältnissen am

stirnseitig befestigten Freilauf beurteilen zu können, wurden die in Unterabschnitt 6.4.2 beschriebenen Messungen der radialen Aufweitung des Freilaufaußenrings durchgeführt. Hierbei bestätigte sich die Empfehlung, dass eine „weiche“ Lagerung wie z.B. eine reine Führung als Lagerbedingung des letzten Flanschkörpers mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell den realen Verhältnissen am stirnseitig befestigten Freilauf am nächsten kommt. Ebenso konnte gezeigt werden, dass die Reduzierung der diskreten Klemmnormalkräfte auf einen äquivalenten Klemminnendruck eine zulässige Vereinfachung darstellt. Generell trafen die berechneten Aufweitungsverläufe des kombinierten Kreisring-Schalenmodells die gemessenen Verläufe nicht so gut wie die aus entsprechenden 2D-FE-Modellen numerisch ermittelten. Aus dem Vergleich der Verläufe kann jedoch gefolgert werden, dass mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell die radialen Steifigkeiten als zu hoch angenommen werden. Dies macht sich besonders bei „dicken“ Flanschkörpern (mit einem Wandstärkenverhältnis  $\frac{H}{r_s} > 0,2$ ) bemerkbar und ist auf die in der klassischen „Theorie der dünnen Schalen“ vernachlässigten Querkraftverformungen zurückzuführen. Gleichzeitig sorgt dies jedoch auch für die „sichere“ Überschätzung der entstehenden radialen Zusatzkräfte  $\Delta F_R$ .

Zusätzlich wurde mit einem Scherversuch (siehe Abschnitt 6.5) gezeigt, dass die stirnseitig befestigten Freiläufe bei einer formschlüssigen Belastung der Schrauben eine ausreichende Reserve zur Übertragung von statischen Sonder- und Überlasten besitzen.

Eine Stärke des entwickelten analytischen Modells in Verbindung mit dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell ist, dass schnelle und anschauliche Vergleichsrechnungen zwischen verschiedenen Konstruktionsvarianten möglich sind. Dieser Umstand wurde in Kapitel 7 genutzt, um Hinweise zur optimalen Gestaltung einer stirnseitigen Freilauf-Flansch-Verbindung zu geben.

Abschließend kann festgehalten werden, dass es mit dem analytischen Modell aus Kapitel 4 und dem kombinierten Kreisring-Schalenmodell aus Kapitel 5 gelungen ist, das System des stirnseitig befestigten Freilaufs derart zu beschreiben, dass es einer analytischen Beschreibung, Berechnung und Lösung zugänglich ist. So muss nicht immer numerisch simuliert werden, wobei eine analytische Modellbildung auch so gut wie immer eine Vereinfachung bedeutet, gleichzeitig durch den hohen Idealisierungsgrad jedoch auch schnelle Vergleichsrechnungen ermöglicht. Frei nach dem Motto:

---

„Alles Einfache ist falsch, alles Komplizierte unbrauchbar.“<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Paul Valéry in *Notre Destin et les Lettres*, 1937 - heute in anderer Formulierung auch als BONINI-PARADOX bekannt.





## 9 Ausblick

Mit der mit dieser Arbeit nun vorliegenden Modellvorstellung für die sich aus der behinderten radialen Aufweitung ergebenden radialen Zusatzlasten und der Abschätzungsmethode des kombinierten Kreisring-Schalenmodells ist eine Anwendung und Überprüfung anderer Arten von verschraubten Flanschverbindungen ebenfalls möglich. In Abschnitt 9.1 werden deshalb weitere Verbindungsfälle diskutiert, an denen sich ebenfalls infolge behinderter radialer Aufweitung radiale Zusatzlasten für die stirnseitigen Mehrschraubenverbindungen ergeben.

Weiterhin sind natürlich noch weitere Verbesserungen am kombinierten Kreisring-Schalenmodell möglich, mit denen eine genauere Abschätzung der Kräfteverhältnisse bzw. relativen Übertragbarkeiten erreicht werden könnte. Entsprechende Ansätze sind in Abschnitt 9.3 kurz beschrieben.

### 9.1 Flanschverbindungen an Druckbehältern und Rohren unter Innendruck

Wie bereits erläutert, entstehen radiale Zusatzkräfte an der stirnseitigen Verbindung zweier Rotationskörper, wenn diese beiden Körper für sich betrachtet unterschiedliche Aufweitungen erfahren. Dies ist im Fall des stirnseitig befestigten Freilaufs in der Regel bereits durch die nur den Freilaufaußenring partiell aufweitenden Klemmnormalkräfte gegeben. Jedoch kann es infolge behinderter radialer Aufweitung auch an Flanschverbindungen von Druckbehältern und Rohren unter Innendruck zur Ausbildung radialer Zusatzkräfte kommen.

In diesen Fällen erfahren zwar beide miteinander verbundenen Körper zwar in der Regel den gleichen radial aufweitenden Innendruck, wenn jedoch die radialen Verformbarkeiten der beiden Körper an der Kontaktstelle unterschiedlich sind, kommt es zu den in dieser Arbeit beschriebenen Effekten. In Abb. 9.1 ist der

Ablauf gezeigt, anhand dessen entschieden werden kann, ob an einer stirnseitigen Mehrschraubenverbindung mit mindestens einem radial aufweitend belasteten Körper radiale Zusatzkräfte infolge behinderter radialer Aufweitung zu berücksichtigen sind. Sollte dies erforderlich sein, so kann dies über entsprechende FE-Modelle (FEM) oder auch das in dieser Arbeit entwickelte kombinierte Kreisring-Schalenmodell (kKS) erfolgen.

Nachfolgend sind noch zwei Beispiele für Flanschverbindungen gegeben, bei denen radiale Zusatzkräfte in der Trennfuge zu berücksichtigen sind. Dies ist zum einen in der Regel bei Deckelverschraubungen an Druckbehältern der Fall, da dort konstruktiv nicht ohne Weiteres eine gleiche Aufweitung der stirnseitig miteinander verbundenen Körper erreicht werden kann. In Abb. 9.2 ist ein Beispiel für eine Deckelverschraubung gezeigt, an der infolge der unterschiedlichen radialen Aufweitungen der beiden miteinander verbundenen Körper radiale Zusatzkräfte an der Mehrschraubenverbindung zu berücksichtigen sind.

Ein weiteres Beispiel ist in Abb. 9.3 gezeigt. Bei der in Abb. 9.3 links gezeigten konstruktiven Ausführung einer Flanschverschraubung von zwei Rohrabschnitten, welche mit einem Innendruck beaufschlagt wird, sind zum einen die beiden miteinander verschraubten Flanschbünde unterschiedlich dick ausgeführt und zum anderen weisen noch die beiden Rohrabschnitte unterschiedliche Wandstärken auf. In der rechten Konstruktion ist diese Verbindung deutlich besser gelöst, da auf gleiche Dicken der miteinander verschraubten Flanschbünde und gleiche Wandstärken der Rohrabschnitte in der Nähe der Verbindungsstelle geachtet wurde. Die rechte Konstruktion in Abb. 9.3 wird demnach geringe radiale Zusatzkräfte in der stirnseitigen Reibfuge hervorrufen als die linke Konstruktion.

## **9.2 Schraubenbeanspruchung infolge der behinderten radialen Aufweitung**

Wie z.B. aus Abb. 5.19 ersichtlich, kommt es infolge der ungleichen (Membran-) Aufweitung der stirnseitig miteinander verbundenen Körper neben der Ausbildung einer radialen Zusatzkraft auch zu einem zwischen den Körpern wirkenden Biegemoment. Diese Biegemomente wirken quer zu den Schraubenachsen der stirnseitigen Verschraubung und müssten dementsprechend eine Biegebelastung auf die Schraube bewirken. Diese Belastung könnte in weiteren Forschungstätigkeiten

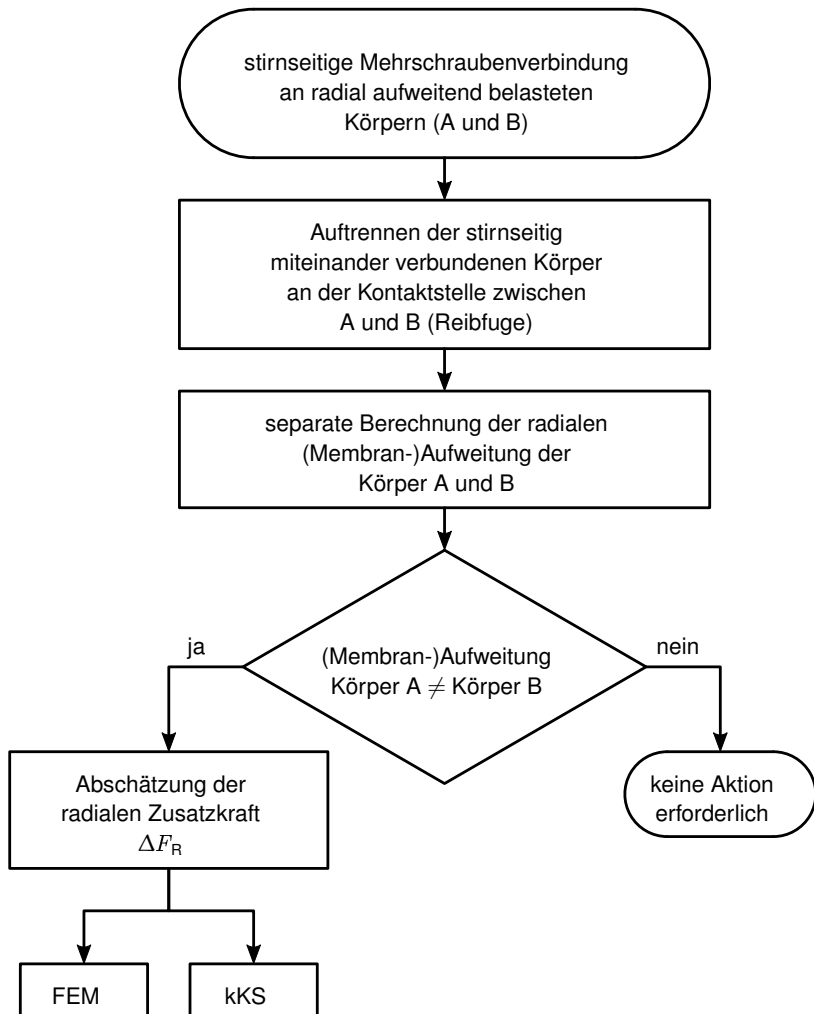


Abb. 9.1: Ablaufdiagramm zur Entscheidung, ob radiale Zusatzkräfte infolge behinderter radialer Aufweitung an einer stirnseitigen Mehrschraubenverbindung zu berücksichtigen sind

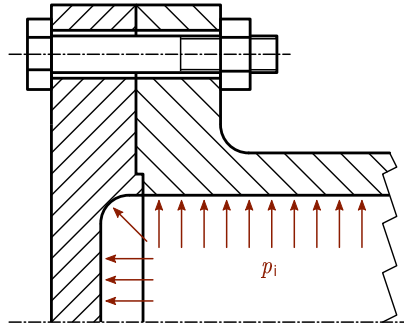


Abb. 9.2: Deckelverschraubung an einem Druckbehälter

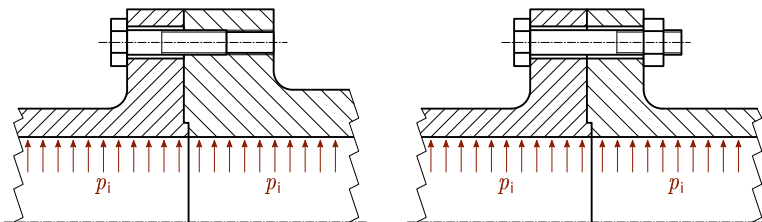


Abb. 9.3: Flanschverbindungen an einem Rohr unter Innendruck - links: ungünstige Konstruktion mit höheren radialen Zusatzlasten - rechts: günstige Konstruktion mit annähernd gleichen radialen Steifigkeiten im Kontaktbereich

untersucht werden.

## 9.3 Ansätze zur Verbesserung des kombinierten Kreisring-Schalenmodells

Wie bereits oben erwähnt, sind noch weitere Verbesserungen am kombinierten Kreisring-Schalenmodell möglich. Im Folgenden sollen hierzu einige Ansätze gegeben werden.

### 9.3.1 Erweiterung des Kreisring-Schalenmodells um weitere Querschnittsformen

Der bisherige Stand des kombinierten Kreisring-Schalenmodells ist, alle Flanschkörper durch Kreiszyinderschalen als Ersatzkörper zu beschreiben. Dies führt z.B. bei den im Zuge dieser Arbeit verwendeten Adapterflanschen mit einem als Kegel ausgeführten Übergang von einem kleinen zu einem größeren Außendurchmesser (vgl. Abb. 5.30) dazu, dass dieser kegelige Abschnitt mit einem „mittleren“ Zylinderflansch als Ersatzkörper im kombinierten Kreisring-Schalenmodell beschrieben wurde. Besser wäre es hier natürlich, wenn die reale Geometrieform dieses Abschnitts mit einer entsprechenden lösbaren Kegelschale beschrieben werden könnte.

In Abb. 9.4 ist links ein kegeliger rotationssymmetrischer Geometrieabschnitt dargestellt, welcher mit einer entsprechenden Schale beschrieben werden soll. Für eine ideale Beschreibung der Kontur würde eine Kegelschale mit linear veränderlicher Wandstärke sorgen, wie sie in Abb. 9.4 rechts dargestellt ist. Leider konnte keine analytische Lösung für diese Kontur in der Literatur gefunden werden.

In z.B. PFLÜGER [Pfl81] sind jedoch analytische Lösungen für einen zylindrischen Behälter mit linear veränderlicher Wandstärke und Kegelschalen mit konstanter Wandstärke gegeben. Inwiefern sich mit diesen Schalenkörpern, wie sie in Abb. 9.5 abgebildet sind, die reale Kontur besser beschreiben lässt als mit einer einfachen Zylinderschale mit dem mittleren Außenradius  $\tilde{r} = \frac{r_1 + r_2}{2}$ , wie es bisher im kombinierten Kreisring-Schalenmodell vorgesehen ist, ist zu prüfen.

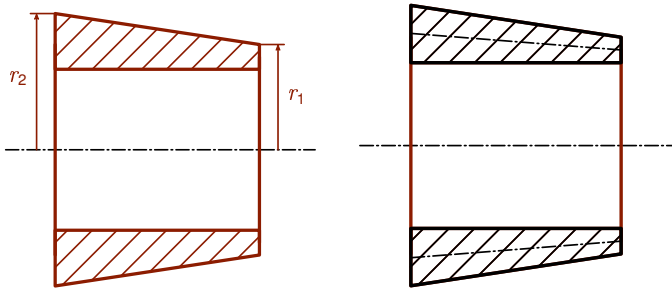


Abb. 9.4: Reale Außenkontur (links) und ideale Ersatzschale in Form einer Kegelschale mit linear veränderlicher Wandstärke (rechts)

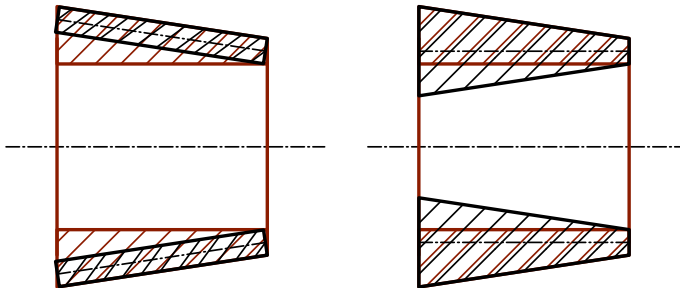


Abb. 9.5: Mit bekannten Lösungen der Schalentheorie beschreibbare Konturen in Form einer Kegelschale mit konstanter Wandstärke (links) und einer Kreiszyinderschale mit linear veränderlicher Wandstärke (rechts)

Für weitere mögliche Geometrieelemente, wie z.B. Rundungen mit großen Radien, können ebenfalls Lösungen für entsprechende Ersatzschalenkörper der Literatur entnommen werden.

### 9.3.2 Berücksichtigung der Querkraftverformungen

Wie bereits festgestellt, ist einer der Hauptgründe für die Abweichungen des kombinierten Kreisring-Schalenmodells von den Ergebnissen entsprechender FE-Modelle (und natürlich auch der Realität) in der der „Theorie dünner Schalen“ zugrunde liegenden Vernachlässigung der Querkraftverformungen zu suchen. Ein Ansatz zur Erweiterung der klassischen Schalentheorie um die Querkraftverformungen ist von ROSEMEIER in [Ros83] als Erweiterung von [Ros73] diskutiert worden.

Wie aus Abschnitt 3.5 bereits bekannt, lautet die charakteristische Gleichung für den Biegezustand der Kreiszylinderschale nach z.B. HAKE und MESKOURIS [HM01]

$$u^{(4)}(z) + 4 \cdot \lambda_0^4 \cdot u(z) = 0 \quad . \quad (9.1)$$

Hierfür ist nach [HM01] folgender Ansatz sinnvoll:

$$\begin{aligned} u(z) = & C_1 \cdot \cosh(\lambda_0 \cdot z) \cdot \cos(\lambda_0 \cdot z) + C_2 \cdot \cosh(\lambda_0 \cdot z) \cdot \sin(\lambda_0 \cdot z) \\ & + C_3 \cdot \sinh(\lambda_0 \cdot z) \cdot \cos(\lambda_0 \cdot z) + C_4 \cdot \sinh(\lambda_0 \cdot z) \cdot \sin(\lambda_0 \cdot z) \end{aligned} \quad (9.2)$$

Für die Bestimmung der Konstanten  $C_1$  bis  $C_4$  sind Randbedingungen nötig, die sich aus den Schnittgrößen der Schale an den Rändern ergeben. Z.B. gilt für den Lastfall eines Randmoments  $M$  am oberen Rand:

$$m_z(0) = M \quad (9.3)$$

$$m_z(B) = 0 \quad (9.4)$$

$$q(0) = q(B) = 0 \quad (9.5)$$

Für eine Randkraft  $R$  am oberen Rand gilt wiederum z.B.:

$$m_z(0) = m_z(B) = 0 \quad (9.6)$$

$$q(0) = R \quad (9.7)$$

$$q(B) = 0 \quad (9.8)$$

Für die Schnittkräfte gilt nach z.B. [HM01]:

$$m_z(z) = K_0 \cdot u''(z) \quad (9.9)$$

$$q(z) = K_0 \cdot u'''(z) \quad (9.10)$$

Hierbei sind

$$K_0 = \frac{E \cdot H^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (9.11)$$

die Biegesteifigkeit und

$$\lambda_0 = \frac{\sqrt[4]{3 \cdot (1 - \nu^2)}}{\sqrt{r_s \cdot H}} \quad (9.12)$$

der Kehrwert der charakteristischen Länge der Kreiszyllinderschale.

Unter Berücksichtigung der Querkraftverformung ändert sich die charakteristische Gleichung der Kreiszyllinderschale nach ROSEMEIER [Ros83] nun zu

$$u^{(4)}(z) + 4 \cdot \lambda^{*4} \cdot u(z) = 0 \quad . \quad (9.13)$$

Wobei für den angepassten Kehrwert der charakteristischen Länge  $\lambda^*$  gilt

$$\lambda^*(z) = \lambda_0 \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \beta \cdot \frac{u^{(6)}(z)}{u^{(4)}(z)}}} \quad . \quad (9.14)$$

Die Biegesteifigkeit wird ebenfalls angepasst, wobei gilt

$$K^*(z) = K_0 \cdot \left( 1 + \beta \cdot \frac{u^{(6)}(z)}{u^{(4)}(z)} \right) \quad . \quad (9.15)$$

Wobei  $\beta$  eine Querschnittskonstante ist und sich nicht mit dem Ort  $z$  ändert. Für diese gilt

$$\beta = \frac{\bar{\kappa} \cdot K_0}{G \cdot A} \quad . \quad (9.16)$$

Hierbei sind  $K_0$  die bereits bekannte Biegesteifigkeit der Kreiszyllinderschale und  $G$  der Schubmodul, für welchen wiederum bekanntlich gilt:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (9.17)$$

Weiterhin ist  $A$  der „Querschnitt“, für den die Querschnittverformungen berücksichtigt werden sollen. In diesem Fall entspricht  $A$  der Dicke der Schale  $H$ . Dement-



sprechend gilt:

$$A = H \quad (9.18)$$

Der Begriff „Querschnitt“ ist in diesem Fall vielleicht etwas irreführend, bezüglich der Dimensionen der Größen bleibt jedoch kein anderer Schluss übrig. Einen weiteren Anhaltspunkt, um die Ansätze von ROSEMEIER nachzuvollziehen, stellt die Diplomarbeit von BROOCKMANN [Bro82] dar, welche von ROSEMEIER betreut wurde und auch in [Ros83] zitiert wird. So wird in [Bro82] die Querschnittsfläche  $A$  als Produkt der Wandstärke der Schale  $H$  mit dem (Einheits-)Wert 1 definiert.

Die Größe  $\bar{\kappa}$  ist die sogenannte Schubverteilungszahl nach HIRSCHFELD [Hir07] und stellt eine Querschnittskonstante dar. Diese berechnet sich für den vorliegenden Querschnitt der Kreiszyinderschale zu:

$$\bar{\kappa} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1,6 + \nu}{1 + \nu} \quad (9.19)$$

Bringt man diese Größen nun in Gleichung (9.16) zusammen, ergibt sich:

$$\beta = \frac{(1,6 + \nu) \cdot H^2}{8 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (9.20)$$

Für die Lösung der charakteristischen Gleichung müsste der bisherige Ansatz laut [Ros83] weiterhin funktionieren, wobei  $\lambda_0$  durch  $\lambda^*(z)$  zu ersetzen ist.

### Lösungsverfahren für lange Zylinderschalen

In [Bro82] und [Ros83] wurde der Ansatz zur Berücksichtigung der Querkraftverformungen nur an langen Zylinderschalen angewendet und beschrieben. Dementsprechend soll im Folgenden auch nur hierauf eingegangen werden.

Durch die Abhängigkeit der angepassten Schalenparameter  $K^*$  und  $\lambda^*$  von dem Quotienten  $\frac{u^{(6)}(z)}{u^{(4)}(z)}$  ergibt sich eine Abhängigkeit dieser Parameter vom Ort in  $z$ -Richtung. Für den Fall der langen Zylinderschale kann der Ansatz aus Gleichung (9.2) auf einen Ansatz mit nur noch zwei unbekannten Bedingungen reduziert werden und das Randwertproblem der kurzen Zylinderschale reduziert sich auf ein Anfangswertproblem. Der neue Ansatz ist jetzt, nach z.B. [HM01]:

$$u(z) = e^{-\lambda^*(z) \cdot z} \cdot (C_1 \cdot \cos(\lambda^*(z) \cdot z) + C_2 \cdot \sin(\lambda^*(z) \cdot z)) \quad (9.21)$$

Je nach Art der Randbelastung ergibt sich ein anderer Anfangsbedingungssatz. Für den Fall einer Randlast  $R$  gilt:

$$q(z=0) = K_0 \cdot u^{(3)}(0) = R \quad (9.22)$$

$$m_z(z=0) = K_0 \cdot u^{(2)}(0) = 0 \quad (9.23)$$

Für den zweiten möglichen Lastfall eines Randmoments  $M$  gilt wiederum:

$$q(z=0) = K_0 \cdot u^{(3)}(0) = 0 \quad (9.24)$$

$$m_z(z=0) = K_0 \cdot u^{(2)}(0) = M \quad (9.25)$$

Da für die Anfangswertbedingungen die zweite und dritte Ableitung der radialen Aufweitung  $u$  benötigt werden, sollen diese an dieser Stelle gebildet werden. Die ersten drei Ableitungen von  $u(z)$  nach  $z$  lauten:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(z) &= \frac{du(z)}{dz} = \\ &= (\lambda^*(z))^{(1)} \cdot e^{-\lambda^*(z) \cdot z} \\ &\quad \cdot [(C_2 - C_1) \cdot \cos(\lambda^*(z) \cdot z) - (C_2 + C_1) \cdot \sin(\lambda^*(z) \cdot z)] \end{aligned} \quad (9.26)$$

$$\begin{aligned} u^{(2)}(z) &= \frac{d^2u(z)}{dz^2} = \\ &= (\lambda^*(z))^{(2)} \cdot e^{-\lambda^*(z) \cdot z} \\ &\quad \cdot [(C_2 - C_1) \cdot \cos(\lambda^*(z) \cdot z) - (C_2 + C_1) \cdot \sin(\lambda^*(z) \cdot z)] \\ &\quad + 2 \cdot (\lambda^*(z))^{(1)2} \cdot e^{-\lambda^*(z) \cdot z} \\ &\quad \cdot [C_1 \cdot \sin(\lambda^*(z) \cdot z) - C_2 \cdot \cos(\lambda^*(z) \cdot z)] \end{aligned} \quad (9.27)$$

$$\begin{aligned}
u^{(3)}(z) &= \frac{d^3 u(z)}{dz^3} = \\
&= (\lambda^*(z))^{(3)} \cdot e^{-\lambda^*(z) \cdot z} \\
&\quad \cdot [(C_2 - C_1) \cdot \cos(\lambda^*(z) \cdot z) - (C_2 + C_1) \cdot \sin(\lambda^*(z) \cdot z)] \\
&\quad + 6 \cdot (\lambda^*(z))^{(2)} \cdot (\lambda^*(z))^{(1)} \cdot e^{-\lambda^*(z) \cdot z} \\
&\quad \cdot [C_1 \cdot \sin(\lambda^*(z) \cdot z) - C_2 \cdot \cos(\lambda^*(z) \cdot z)] \\
&\quad + 2 \cdot (\lambda^*(z))^{(1)3} \cdot e^{-\lambda^*(z) \cdot z} \\
&\quad \cdot [(C_2 + C_1) \cdot \cos(\lambda^*(z) \cdot z) + (C_2 - C_1) \cdot \sin(\lambda^*(z) \cdot z)]
\end{aligned} \tag{9.28}$$

Da infolge der Berücksichtigung der Querkraftverformungen nun auch die angepasste charakteristische Länge  $\lambda^*$  vom axialen Ort  $z$  abhängig ist, sind die Ableitungen etwas komplizierter und enthalten weiterhin die ersten drei Ableitungen von  $\lambda^*(z)$ . Unter der Annahme einer konstanten charakteristischen Länge  $\lambda$  kann zum einen  $\lambda^*(z)$  iterativ bestimmt werden und zum anderen ist eine Ableitung von  $\lambda^*(z)$  nach  $z$  möglich. Hierzu kann Gleichung (9.14) zuerst einmal umgeschrieben werden:

$$\lambda^*(z) = \lambda \cdot (1 + 2 \cdot \beta \cdot \lambda \cdot F_s(z))^{-\frac{1}{4}} \tag{9.29}$$

Die Funktion  $F_s(z)$  entspricht dem Verhältnis der sechsten zur vierten Ableitung der radialen Aufweitung der Kreiszylinderschale  $\frac{u^{(6)}(z)}{u^{(4)}(z)}$  unter der Annahme ortsunabhängiger Schalenparameter. Für den Fall der langen Zylinderschale lautet  $F_s(z)$  demnach:

$$F_s(z) = \frac{C_1 \cdot \sin(\lambda \cdot z) - C_2 \cdot \cos(\lambda \cdot z)}{C_1 \cdot \cos(\lambda \cdot z) + C_2 \cdot \sin(\lambda \cdot z)} \tag{9.30}$$

Da die erste Ableitung von  $F_s(z)$  während der Ableitung von  $\lambda^*(z)$  öfters benötigt wird, soll sie an dieser Stelle kurz angegeben werden:

$$F_s^{(1)}(z) = \lambda \cdot (1 + F_s(z)^2) \tag{9.31}$$

Damit lauten die ersten drei Ableitungen von  $\lambda^*(z)$ :

$$\begin{aligned}
(\lambda^*(z))^{(1)} &= \frac{d\lambda^*(z)}{dz} = \\
&= -\frac{\lambda^2 \cdot 2 \cdot \beta \cdot \lambda}{4} \cdot (1 + 2 \cdot \beta \cdot \lambda \cdot F_s(z))^{-\frac{5}{4}} \cdot [1 + F_s(z)^2]
\end{aligned} \tag{9.32}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda^*(z))^{(2)} &= \frac{d^2 \lambda^*(z)}{dz^2} = \\
&= \frac{\lambda^3 \cdot 2 \cdot \beta \cdot \lambda}{4} \\
&\quad \cdot \left[ \frac{5}{4} \cdot 2 \cdot \beta \cdot \lambda \cdot (1 + 2 \cdot \beta \cdot \lambda \cdot F_s(z))^{-\frac{9}{4}} \cdot (1 + F_s(z)^2)^2 \right. \\
&\quad \left. - 2 \cdot (1 + 2 \cdot \beta \cdot \lambda \cdot F_s(z))^{-\frac{5}{4}} \cdot (F_s(z) + F_s(z)^3) \right]
\end{aligned} \tag{9.33}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda^*(z))^{(3)} &= \frac{d^3 \lambda^*(z)}{dz^3} = \\
&= \frac{\lambda^4 \cdot 2 \cdot \beta \cdot \lambda}{4} \\
&\quad \cdot \left\{ \frac{45}{16} \cdot (2 \cdot \beta \cdot \lambda)^2 \cdot (1 + 2 \cdot \beta \cdot \lambda \cdot F_s(z))^{-\frac{13}{4}} \cdot (1 + F_s(z)^2)^3 \right. \\
&\quad + \frac{15}{2} \cdot 2 \cdot \beta \cdot \lambda \\
&\quad \cdot (1 + 2 \cdot \beta \cdot \lambda \cdot F_s(z))^{-\frac{9}{4}} \cdot (1 + F_s(z)^2)^2 \cdot F_s(z) \\
&\quad + (1 + 2 \cdot \beta \cdot \lambda \cdot F_s(z))^{-\frac{5}{4}} \\
&\quad \left. \cdot \left[ (1 + F_s(z)^2) + 3 \cdot F_s(z)^2 \cdot (1 + F_s(z)^2) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{9.34}$$

Zur Bestimmung des gesuchten, durch die Berücksichtigung der Querkraftverformungen angepassten Schalenparameters  $\lambda^*(z = 0)$  ist nun folgendermaßen vorzugehen:

1. Ausgehend von den bekannten Lösungen  $C_1$  und  $C_2$  für die Schalentheorie ohne Berücksichtigung der Querkraftverformungen aus Kapitel 3.5.3 und den zugehörigen Schalenparametern  $K$  und  $\lambda$  kann die angepasste charakteristische Länge  $\lambda^*$  über Gleichung (9.14) iterativ bestimmt werden. Hierzu wird zuerst mit den Startwerten ein neues  $\lambda_{(k)}^*$  bestimmt.
2. Anschließend werden mit dem neuen  $\lambda_{(k)}^*$  die Lösungen der DGL der biegebelasteten Schale  $C_{1(k)}^*$  und  $C_{2(k)}^*$  neu bestimmt. Hierbei müssen die Lösungen numerisch bestimmt werden. Sind die neuen Lösungen bekannt, kann mit dem vorherigen Wert  $\lambda_{(k)}^*$  und den zugehörigen Lösungen  $C_{1(k)}^*$  und  $C_{2(k)}^*$  eine neue charakteristische Länge  $\lambda_{(k+1)}^*$  nach Gleichung (9.14) bestimmt werden. Mit dieser neuen Lösung werden anschließend wiederum numerisch neue Lösungen  $C_{1(k+1)}^*$  und  $C_{2(k+1)}^*$  bestimmt.

Das oben beschriebene Lösungsverfahren kann nun mehrmals durchlaufen werden, um sich der eigentlichen Lösung des Problems numerisch anzunähern. Hierbei finden alle Berechnungen für den Rand ( $z = 0$ ) statt. Dementsprechend reduziert sich für den Fall der langen Zylinderschale die Gleichung (9.14) auf:

$$\lambda^*(z=0) = \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1 - 2 \cdot \beta \cdot \lambda \cdot \frac{C_2}{C_1}}} \quad (9.35)$$

Bzw. umgeschrieben auf die iterative Vorgehensweise ergibt sich folgende Gleichung:

$$\lambda_{(k+1)}^* := \lambda_{(k)}^* \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1 - 2 \cdot \beta \cdot \lambda_{(k)}^* \cdot \frac{C_2^*}{C_1^*}}} \quad (9.36)$$

Für die Näherung der Lösungen der angepassten Schalengleichung kann z.B. das NEWTONsche Näherungsverfahren auf die Anfangsbedingungen angewendet werden. Zu bestimmen sind die Lösungen der Gleichungssätze (9.22) und (9.23) sowie (9.24) und (9.25). Diese beiden Gleichungssätze können folgendermaßen umgeformt werden:

$$\text{Lastfall } R: \quad u^{(2)}(0) = 0 \text{ und } u^{(3)}(0) - \frac{R}{K_0} = 0$$

$$\text{Lastfall } M: \quad u^{(2)}(0) - \frac{M}{K_0} = 0 \text{ und } u^{(3)}(0) = 0$$

Das NEWTONsche Nullstellenverfahren zur Bestimmung der unbekannten Konstanten  $C_1^*$  und  $C_2^*$  kann in diesem Fall folgendermaßen formuliert werden. Es gilt:

$$\underline{\underline{J_f}}(\underline{y}_{(k)}) \cdot \underline{Z}_{(k)} = -\underline{f}(\underline{y}_{(k)}) \quad (9.37)$$

Hierbei ist  $\underline{\underline{J_f}}$  die sogenannte Funktionalmatrix bzw. Jacobi-Matrix. Diese enthält die partiellen Ableitungen der zweiten und dritten Ableitungen von  $u$  nach den gesuchten Unbekannten  $C_1^*$  und  $C_2^*$  am Rand der langen Zylinderschale ( $z = 0$ ). Dementsprechend gilt:

$$\underline{\underline{J_f}} = \begin{bmatrix} \frac{\delta u^{(2)}(z=0, C_1^*, C_2^*)}{\delta C_1^*} & \frac{\delta u^{(2)}(z=0, C_1^*, C_2^*)}{\delta C_2^*} \\ \frac{\delta u^{(3)}(z=0, C_1^*, C_2^*)}{\delta C_1^*} & \frac{\delta u^{(3)}(z=0, C_1^*, C_2^*)}{\delta C_2^*} \end{bmatrix} \quad (9.38)$$

Umgeschrieben auf das vorliegende Problem lautet das zu lösende Gleichungs-

system demnach:

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta u^{(2)}(z=0, C_1^*, C_2^*)}{\delta C_1^*} & \frac{\delta u^{(2)}(z=0, C_1^*, C_2^*)}{\delta C_2^*} \\ \frac{\delta u^{(3)}(z=0, C_1^*, C_2^*)}{\delta C_1^*} & \frac{\delta u^{(3)}(z=0, C_1^*, C_2^*)}{\delta C_2^*} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta C_1^* \\ \Delta C_2^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (9.39)$$

Hierbei stellt die rechte Seite den jeweiligen Anfangsbedingungssatz dar. Dementsprechend gilt wiederum:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^{(2)}(z=0, C_1^*, C_2^*) \\ u^{(3)}(z=0, C_1^*, C_2^*) - \frac{R}{K_0} \end{bmatrix} \text{ bzw. } \begin{bmatrix} u^{(2)}(z=0, C_1^*, C_2^*) - \frac{M}{K_0} \\ u^{(3)}(z=0, C_1^*, C_2^*) \end{bmatrix} \quad (9.40)$$

Weiterhin gilt für die aus dem NEWTONverfahren zu bestimmenden Differenzen:

$$\Delta C_1^* = C_{1(k+1)}^* - C_{1(k)}^* \quad (9.41)$$

$$\Delta C_2^* = C_{2(k+1)}^* - C_{2(k)}^* \quad (9.42)$$

Dementsprechend gilt für die neuen genäherten Unbekannten:

$$C_{1(k+1)}^* = C_{1(k)}^* + \Delta C_1^* \quad (9.43)$$

$$C_{2(k+1)}^* = C_{2(k)}^* + \Delta C_2^* \quad (9.44)$$

Die für die Funktionalmatrix erforderlichen Ableitungen der radialen Aufweitung können nur für die Startwerte noch analytisch berechnet werden, danach ist es erforderlich, diese numerisch anzunähern. Dies ist z.B. über den in Anhang A.1 definierten zentralen bzw. symmetrischen Differenzenquotienten möglich.

In [Bro82] wurde am Beispiel eines dickwandigen Behälters das in [Ros83] beschriebene Verfahren zur Berücksichtigung der Querkraftverformungen durchgeführt. Hierbei zeigte sich die zu erwartende Reduzierung der angepassten Biegesteifigkeit  $K^*$  gegenüber der ursprünglichen Biegesteifigkeit  $K_0$ . Leider konnte das Verfahren anhand des in [Bro82] gegebenen Beispiels aufgrund von Stabilitätsproblemen der numerischen Ableitungen nicht vollständig nachvollzogen werden.

Eine erfolgreiche Berücksichtigung der Querkraftverformungen würde zu höheren sich aus dem Schalenmodell ergebenden Verformungen führen und dementsprechend zu geringeren resultierenden Kräfteverhältnissen und dementsprechend höheren relativen Übertragbarkeiten  $\beta_R$  im analytischen Modell aus Kapitel 4 dieser Arbeit.

### 9.3.3 Verwendung anderer Berechnungsmethoden für die Formänderungswerte

Das allgemeine Vorgehen bei der Abschätzung der radialen Zusatzkräfte über das Kraftgrößenverfahren stellt eine anschauliche und grundsätzlich gut geeignete Methode dar. Über die Formulierung der einzelnen Formänderungswerte an den einzelnen Ersatzkörpern ist jedoch noch eine bessere Abbildung der realen radialen Steifigkeiten vor allem bei dicken Zylinderschalen und somit auch eine bessere Abschätzung der radialen Zusatzkräfte denkbar.

Die in dieser Arbeit genutzte klassische „Theorie dünner Schalen“ von KIRCHHOFF und LOVE hat trotz der Erweiterungen von ROSEMEIER in [Ros73] immer noch den grundsätzlichen Nachteil einer *schubstarren* Schalenformulierung, welche keine Querkraftverformungen berücksichtigt. Ein Ansatz zur Berücksichtigung der Querkraftverformungen ist in Unterabschnitt 9.3.2 bereits kurz diskutiert worden. Nachteil dieses Ansatzes ist jedoch, dass, um von der schubstarren Schalenberechnung zu einer schubweichen zu gelangen, die Querkraftverformungen in einem numerischen Verfahren berücksichtigt werden müssen. (Was in diesem Fall zu Instabilitäten führte und vorerst leider keine zuverlässige Lösung des Problems ermöglichte.)

Neben den klassischen *schubstarren* Schalenformulierungen, welche auch mit dem Begriff „KIRCHHOFF-LOVE-Kinematik“ verknüpft sind, existieren jedoch auch *schubweiche* Schalenformulierungen (REISSNER-MINDLIN-Kinematik). Ein guter Überblick über die verschiedenen Schalentheorien gibt z.B. IRSLINGER in [Irs13]. Nachteil der meisten schubweichen Schalenformulierungen ist, dass diese nur numerisch lösbar sind, was eine einfache Anwendung im Sinne dieser Arbeit erschwert.

Weitere möglicherweise interessante Ansätze für eine bessere Abbildung der realen radialen Steifigkeiten stellen die „Verallgemeinerte Technische Biegetheorie“ (VTB) von SCHARDT [Sch89] und auf dem RITZschen Näherungsverfahren bzw. der LOVEschen Verschiebungsfunktion aufbauende Berechnungsverfahren, wie z.B. das in der Dissertation von HALLE [Hal12] entwickelte analytische Modell für dicke Naben bei innenhochdruckgefühten Pressverbindungen. Die VTB ebenso wie das RITZsche Näherungsverfahren stellen jedoch wiederum numerische Verfahren dar.





## Literaturverzeichnis

- [BK85] BAŞAR, Yavuz ; KRÄTZIG, Wilfried B.: *Mechanik der Flächentragwerke: Theorie, Berechnungsmethoden, Anwendungsbeispiele*. Braunschweig : Vieweg, 1985 (Grundlagen der Ingenieurwissenschaften). – ISBN 3–528–08685–8
  
- [Bro82] BROOCKMANN, Horst-Günter: *Statische Berechnung eines dickwandigen Behälters unter Innendruck*, Universität Hannover, Diplomarbeit, 1982
  
- [Cha06] CHAKRABARTY, Jagabanduhu: *Theory of Plasticity*. 3. Aufl. s.l. : Elsevier professional, 2006. – ISBN 0–7506–6638–2
  
- [Cho16] CHORZEWSKI, David: *Weiterentwicklung eines Messverfahrens zur Ermittlung von Schraubenvorspannkräften*, TU Clausthal, Masterarbeit, 29.09.2016
  
- [DIN7984] Norm DIN 7984 Juni 2009. *Zylinderschrauben mit Innensechskant mit niedrigem Kopf*
  
- [EC3a] Norm DIN EN 1993-1-8 Dezember 2010. *Eurocode 3: Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten - Teil 1-8: Bemessung von Anschlüssen*
  
- [EC3b] Norm DIN EN 1993-1-9 Dezember 2010. *Eurocode 3: Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten – Teil 1-9: Ermüdung*
  
- [EN1090] Norm DIN EN 1090-2 Oktober 2011. *Ausführung von Stahltragwerken und Aluminiumtragwerken - Teil 2: Technische Regeln für die Ausführung von Stahltragwerken*
  
- [EN20273] Norm DIN EN 20273 Februar 1992. *Mechanische Verbindungselemente - Durchgangslöcher für Schrauben*

- [Flü62]      FLÜGGE, Wilhelm: *Statik und Dynamik der Schalen*. 3., neubearb. Aufl. Berlin and Göttingen and Heidelberg : Springer, 1962. – ISBN 9783642882494
- [FNP11]      FELDMANN, Markus ; NAUMES, Johannes ; PAK, Daniel: Zum Last-Verformungsverhalten von Schrauben in vorgespannten Ringflanschverbindungen mit überbrückten Klaffungen im Hinblick auf die Ermüdungsvorhersage. In: *Stahlbau* 80 (2011), Nr. 1, S. 21–29. – ISSN 00389145
- [Ger91]      GERBER, Hans: *Statisch überbestimmte Flanschverbindungen mit Reib- und Formschlußelementen unter Torsions-, Biege- und Querkraftbelastung*, Technische Universität Berlin, Dissertation, 1991
- [GHSW07]      GROSS, Dietmar ; HAUGER, Werner ; SCHNELL, Walter ; WRIGGERS, Peter: *Technische Mechanik 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, numerische Methoden*. 6., vollst. neu bearbeitete Aufl. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007 (Springer-Lehrbuch). – ISBN 978–3–540–70737–0
- [Gir86]      GIRKMANN, Karl: *Flächentragwerke: Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke*. 6. Aufl., unveränd. Nachdr. Wien u.a. : Springer, 1986. – ISBN 3–211–80639–3
- [Grä15]      GRÄFENSTEINER, Matthias: *Forschungsheft / Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen e. V.. Bd. 1077: Analyse und Synthese charakterisierender Kennwerte zur funktionsgerechten Gestaltung von Wirkflächenpaaren in reibschlüssigen Verbindungen: GECKO - TP I; Abschlussbericht*. Frankfurt am Main : FVV, 2015
- [Grü05]      GRÜNENDICK, Torsten: *Die Berechnung innenhochdruckgefügter Pressverbindungen: Zugl.: Clausthal, Techn. Univ., Diss., 2004*. 1. Aufl. Clausthal-Zellerfeld : Papierflieger, 2005. – ISBN 3–89720–795–8
- [Hal12]      HALLE, Moritz: *Die Berechnung innenhochdruckgefügter Pressverbindungen unter Berücksichtigung von Naben mit nichtkonstantem Außendurchmesser*, Technische Universität Clausthal, Dissertation, 2012
- [Hir07]      HIRSCHFELD, Kurt: *Baustatik: Theorie Und Beispiele*. Dordrecht : Springer, 2007 (Klassiker der Technik). – ISBN 978–3–540–36772–

- [HM01] HAKE, Erwin ; MESKOURIS, Konstantin: *Statik der Flächentragwerke: Einführung mit vielen durchgerechneten Beispielen*. Berlin u.a. : Springer, 2001 (Springer-Lehrbuch). – ISBN 3–540–41997–7
- [Hof14] HOFMANN, Sebastian: Möglichkeiten zum Erfassen der Schraubenvorspannung mit Dehnungsmessstreifen. In: *Mitteilungen aus dem Institut für Maschinenwesen der Technischen Universität Clausthal* 39 (2014), S. 95–100
- [Hof16] HOFMANN, Sebastian: Berechnung querbelasteter Schraubenverbindungen. In: *Mitteilungen aus dem Institut für Maschinenwesen der Technischen Universität Clausthal* (2016), Nr. 41, S. 5–20
- [Hof17] HOFMANN, Sebastian: *Forschungsheft / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V.* Bd. 1241: *Stirnseitige Befestigung von Freiläufen: Abschlussbericht; Forschungsvorhaben Nr. 704 I*. Frankfurt am Main : FVA, 2017
- [HW94] HAUHOFF, Jörg ; WÜNSCH, Dieter: *FAT-Schriftenreihe*. Bd. Nr. 110: *Schädigungsmechanismen bei kreuzverzahnten Flanschverbindungen*. Frankfurt am Main : FAT, 1994
- [Irs13] IRSLINGER, Johannes: *Bericht / Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart*. Bd. 61: *Mechanische Grundlagen und Numerik dreidimensionaler Schalenelemente: Zugl.: Stuttgart, Univ., Diss., 2013*. Stuttgart : Inst. für Baustatik und Baudynamik der Univ. Stuttgart, 2013. – ISBN 9783000447075
- [ISO3506] Norm DIN EN ISO 3506-1 April 2010. *Mechanische Eigenschaften von Verbindungselementen aus nichtrostenden Stählen – Teil 1: Schrauben*
- [ISO4014] Norm DIN EN ISO 4014 Juni 2011. *Sechskantschrauben mit Schaft – Produktklassen A und B*
- [ISO4032] Norm DIN EN ISO 4032 April 2013. *Sechskantmuttern (Typ 1) - Produktklassen A und B*

- [ISO898] Norm DIN EN ISO 898-1 Mai 2013. *Mechanische Eigenschaften von Verbindungselementen aus Kohlenstoffstahl und legiertem Stahl – Teil 1: Schrauben mit festgelegten Festigkeitsklassen – Regelgewinde und Feingewinde*
- [KBR11] KUMAR, Nomesh ; BRAHAMANANDAM, PVG ; RAO, BV P.: 3-D Finite Element Analysis of Bolted Flange Joint of Pressure Vessel. In: *MIT International Journal of Mechanical Engineering* 1 (2011), Nr. 1, S. 35–40
- [Leh00a] LEHMANN, D.: Berechnung des nichtlinearen Tragverhaltens gezogener vorgespannter L-Flansche. In: *Stahlbau* 69 (2000), Nr. 1, S. 35–54. – ISSN 00389145
- [Leh00b] LEHMANN, D.: Berechnung von L-Flanschen mit unterschiedlichen Kontaktflächen/Ringflanschformen nach DIN 4133. In: *Stahlbau* 69 (2000), Nr. 9, S. 682–687. – ISSN 00389145
- [Leh03a] LEHMANN, D.: Nichtlinearer Längskraft- und Biegemomentenverlauf in der Schraube vorgespannter L-Flansche - Näherungslösungen mit und ohne Iteration - Teil 2. In: *Stahlbau* 72 (2003), Nr. 10, S. 734–743. – ISSN 00389145
- [Leh03b] LEHMANN, D.: Nichtlinearer Längskraft- und Biegemomentenverlauf in der Schraube vorgespannter L-Flansche - Näherungslösungen mit und ohne Iteration / Teil 1. In: *Stahlbau* 72 (2003), Nr. 9, S. 653–663. – ISSN 00389145
- [MH09] MESKOURIS, Konstantin ; HAKE, Erwin: *Statik der Stabtragwerke*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2009. – ISBN 978–3–540–88992–2
- [Mic88] MICHLIGK, Thomas: *Forschungsheft / Forschungsvereinigung Antriebstechnik eV. Bd. 266: Statisch überbestimmte Flanschverbindungen mit gleichzeitigem Reib- und Formschluß: Abschlußbericht ; Berichtszeitraum: 1983-1987*. Frankfurt am Main : FVA, 1988
- [Nag16] NAGLER, Nadine: *Einfluss einer zusätzlichen Axiallast auf das Übertragungsverhalten von Klemmrollenfreiläufen*, Technische Universität Clausthal, Dissertation, 2016

- [Nip] NIPP, Kaspar: *Numerische Mathematik: Seminar für angewandte Mathematik: Script zur Vorlesung*. Zürich,
- [NW04] NIEMANN, Gustav ; WINTER, Hans: *Engineering online library*. Bd. / G. Niemann; H. Winter ; Bd. 3: *Schraubrad-, Kegelrad-, Schnecken-, Ketten-, Riemen-, Reibradgetriebe, Kupplungen, Bremsen, Freiläufe*. 2., völlig neu bearb. Aufl., berichtiger Nachdr., Nachdr. Berlin : Springer, 2004. – ISBN 3–540–10317–1
- [Pet98] PETERSEN, Ch.: Nachweis der Betriebsfestigkeit exzentrisch beanspruchter Ringflanschverbindungen. In: *Stahlbau* 67 (1998), Nr. 3, S. 191–203. – ISSN 00389145
- [Pfl81] PFLUEGER, Alf: *Elementare Schalenstatik*. 5. Aufl. Berlin, Heidelberg usw. : Springer, 1981. – ISBN 3–540–10320–1
- [Rab63] RABICH, Reinhold: Statik der Platten, Scheiben, Schalen. In: GRÜNING, Günther (Hrsg.) ; HÜTTER, Alfred (Hrsg.) ; LEDDERBOGE, Otto-Heinrich (Hrsg.): *Grundlagen des Ingenieurbaus* Bd. Band I. Leipzig : Teubner, 1963, S. 861–1120
- [Rin] RINGSPANN GMBH (Hrsg.): *Freiläufe: Rücklaufsperrern, Überholfreiläufe, Vorschubfreiläufe: Produktkatalog*. Bad Homburg,
- [Roi78] ROIK, Karlheinz: *Vorlesungen über Stahlbau*. Berlin, München, Düsseldorf : Ernst, 1978. – ISBN 3–433–00833–7
- [Ros73] ROSEMEIER, G.-E.: Zur Biegetheorie der dicken Kreiszyinderschale. In: *Beton- und Stahlbetonbau* (1973), Nr. 12, S. 288–296. – ISSN 00059900
- [Ros83] ROSEMEIER, G.-E.: Eine verschärfte Biegetheorie der dicken Kreiszyinderschale. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 78 (1983), Nr. 10, S. 270–273. – ISSN 00059900
- [Sch68] SCHRÖDER, H.: Baustatik. In: *Beton-Kalender* (1968), Nr. I, S. 290–412
- [Sch89] SCHARDT, Richard: *Verallgemeinerte technische Biegetheorie: Lineare Probleme*. Berlin and Heidelberg and New York and London and

- Paris and Tokyo and Hong Kong : Springer, 1989. – ISBN 3–540–51339–6
- [Sch14]      SCHERM, Wolfgang S.: *Konstruktion eines Prüfstands zur Drehmomentbelastung stirnseitig befestigter Freilauf-Flanschverbindungen*, TU Clausthal, Bachelorarbeit, 17.12.2014
- [Sei01]      SEIDEL, Marc: *Schriftenreihe des Instituts für Stahlbau der Universität Hannover*. Bd. 20: *Zur Bemessung geschraubter Ringflanschverbindungen von Windenergieanlagen: Zugl.: Hannover, Univ., Diss., 2001*. Aachen : Shaker, 2001. – ISBN 3826589114
- [SEOS15]    SCHAUMANN, Peter ; EICHSTÄDT, Rasmus ; OECHSNER, Matthias ; SIMONSEN, Fabian: Ermüdungsfestigkeit feuerverzinkter HV-Schrauben in Ringflanschverbindungen von Windenergieanlagen. In: *Stahlbau* 84 (2015), Nr. 12, S. 1010–1015. – ISSN 00389145
- [SES18]    SCHAUMANN, Peter ; EICHSTÄDT, Rasmus ; STANG, Andre: Advanced performance assessment methods for high-strength bolts in ring-flange connections. In: *Stahlbau* 87 (2018), Nr. 5, S. 446–455. – ISSN 00389145
- [SH61]      STÖLZLE, Karl ; HART, Sigwalt: *Konstruktionsbücher*. Bd. 19: *Freilaufkupplungen: Berechnung und Konstruktion*. Berlin and Heidelberg : Springer, 1961. – ISBN 978–3–642–51094–6
- [SKS01]    SCHAUMANN, P. ; KLEINEIDAM, P. ; SEIDEL, M.: Zur FE-Modellierung von zugbeanspruchten Schraubenverbindungen. In: *Stahlbau* 70 (2001), Nr. 2, S. 73–84. – ISSN 00389145
- [SN97]      SCHMIDT, Herbert ; NEUPER, Meike: Zum elastostatischen Tragverhalten exzentrisch gezogener L-Stöße mit vorgespannten Schrauben. In: *Stahlbau* 66 (1997), Nr. 3, S. 163–168. – ISSN 00389145
- [SRK07]    SMOLNICKI, T ; RUSIŃSKI, E ; KARLIŃSKI, J: FEM modelling of fatigue loaded bolted flange joints. In: *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering* 22 (2007), Nr. 1, S. 69–72
- [SS01]      SEIDEL, M. ; SCHAUMANN, P.: Ermittlung der Ermüdungsbeanspruchung von Schrauben exzentrisch belasteter Flanschverbindungen. In:

*Stahlbau* 70 (2001), Nr. 7, S. 474–486. – ISSN 00389145

- [Sti] STIEBER GMBH (Hrsg.): *Freiläufe und Rücklaufsperrn: Produktkatalog*. Heidelberg,
- [Tho84] THOMALA, Wolfgang: Beitrag zur Berechnung der Haltbarkeit von Schraubenköpfen mit Kraft-Innenangriff. In: *VDI-Z* 126 (1984), Nr. 9, S. 315–321
- [VDI14a] Norm VDI 2230 Blatt 1 Dezember 2014. *Systematische Berechnung hochbeanspruchter Schraubenverbindungen - Zylindrische Einschraubenverbindungen*
- [VDI14b] Norm VDI 2230 Blatt 2 Dezember 2014. *Systematische Berechnung hochbeanspruchter Schraubenverbindungen - Mehrschraubenverbindungen*
- [Wal07] WALTHER, Volkhard: *Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen e.V.* Bd. H. 845: *Stirnpressverbindungen: [Vorhaben Nr. 820], Übertragungsverhalten von Stirnpressverbindungen; Abschlussbericht*. Frankfurt/M : FVV, 2007
- [Wal08] WALTHER, Volkhard: *Grundlagen des Übertragungsverhaltens zentralverschraubter Stirnpressverbindungen: Zugl.: Chemnitz, Techn. Univ., Diss., 2008*. Aachen : Shaker, 2008 (Berichte aus dem Maschinenbau). – ISBN 9783832276744
- [WWXX10] WU, Bin ; WANG, Tao ; XU, Chao ; XU, Bing: Finite Element Analysis of Behavior of Bolted Flange Connections under Bending Loading. In: *Applied Mechanics and Materials* 26-28 (2010), S. 1168–1171. – ISSN 1662–7482
- [ŻB10] ŻYLIŃSKI, Bartłomiej ; BUCZKOWSKI, Ryszard: Analysis of Bolt Joint Using the Finite Element Method. In: *Archive of Mechanical Engineering* 57 (2010), Nr. 3, S. 858. – ISSN 0004–0738





## A Mathematische Grundlagen

### A.1 Numerische Ableitung

Für die numerische Ableitung kann der zentrale bzw. symmetrische Differenzenquotient genutzt werden. Dieser bietet Vorteile bei der numerischen Stabilität und ist z.B. laut NIPP [Nip] folgendermaßen definiert:

$$\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} := \frac{1}{(2 \cdot \Delta x)^n} \cdot \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot y_{i+n-2 \cdot k} \quad (\text{A.1})$$

Es gilt hierbei  $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$  und  $y_{i+m} = f(x + m \cdot \Delta x)$ . Dementsprechend gilt für den Differenzenquotient 1. Ordnung:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2 \cdot \Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2 \cdot \Delta x} \quad (\text{A.2})$$

Aus Gleichung (A.1) ergibt sich für den Differenzenquotient 2. Ordnung:

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} := \frac{y_{i+2} - 2 \cdot y_i + y_{i-2}}{4 \cdot \Delta x^2} \quad (\text{A.3})$$

Die weiteren Differenzenquotienten bis zur 6. Ordnung lauten demnach nach Gleichung (A.1) von NIPP:

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} := \frac{y_{i+3} - 3 \cdot y_{i+1} + 3 \cdot y_{i-1} - y_{i-3}}{8 \cdot \Delta x^3} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4} := \frac{y_{i+4} - 4 \cdot y_{i+2} + 6 \cdot y_i - 4 \cdot y_{i-2} + y_{i-4}}{16 \cdot \Delta x^4} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\Delta^5 y}{\Delta x^5} := \frac{y_{i+5} - 5 \cdot y_{i+3} + 10 \cdot y_{i+1} - 10 \cdot y_{i-1} + 5 \cdot y_{i-3} - y_{i-5}}{32 \cdot \Delta x^5} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\Delta^6 y}{\Delta x^6} := \frac{y_{i+6} - 6 \cdot y_{i+4} + 15 \cdot y_{i+2} - 20 \cdot y_i + 15 \cdot y_{i-2} - 6 \cdot y_{i-4} + y_{i-6}}{64 \cdot \Delta x^6} \quad (\text{A.7})$$



## B Daten der Designpoints

Im Folgenden sind die im Zuge dieser Arbeit untersuchten Designpoints tabellarisch aufgelistet. Der Begriff „Referenz“ bezeichnet hierbei eine Parameterkombination, welche für jeden dem Designpoint zugrundeliegenden Freilauf (*Modell 1* bis *Modell 4*) in jedem Variationsblock einmal unverändert enthalten ist.

Tab. B.1: Liste der Designpoints für Parametervariation

Design-point	$D_{AR}$ in mm	$d_{AR}$ in mm	$b_{AR}$ in mm	$b_K$ in mm	$d_T$ in mm	$D_{FL}$ in mm	$d_{FL}$ in mm	$b_{FL}$ in mm	Freilauf	Variierter Parameter	Bemerkung
1	100	75	44	25	87	150	67	10	Modell 1	$b_{FL}$	
2	100	75	44	25	87	150	67	20	Modell 1	$b_{FL}$	
3	100	75	44	25	87	150	67	25	Modell 1	$b_{FL}$	
4	100	75	44	25	87	150	67	34,5	Modell 1	$b_{FL}$	Referenz
5	100	75	44	25	87	150	67	50	Modell 1	$b_{FL}$	
6	100	75	44	25	87	150	67	80	Modell 1	$b_{FL}$	
7	100	75	44	25	87	150	67	100	Modell 1	$b_{FL}$	
8	100	75	44	25	87	150	67	150	Modell 1	$b_{FL}$	
9	100	75	44	25	87	150	67	300	Modell 1	$b_{FL}$	
10	100	75	44	25	87	150	67	500	Modell 1	$b_{FL}$	
11	100	75	44	25	87	150	67	1.000	Modell 1	$b_{FL}$	
12	100	75	44	25	87	101	67	34,5	Modell 1	$D_{FL}$	
13	100	75	44	25	87	105	67	34,5	Modell 1	$D_{FL}$	
14	100	75	44	25	87	110	67	34,5	Modell 1	$D_{FL}$	
15	100	75	44	25	87	120	67	34,5	Modell 1	$D_{FL}$	
16	100	75	44	25	87	130	67	34,5	Modell 1	$D_{FL}$	
17	100	75	44	25	87	140	67	34,5	Modell 1	$D_{FL}$	
18	100	75	44	25	87	150	67	34,5	Modell 1	$D_{FL}$	Referenz

Fortsetzung auf Folgeseite

Fortsetzung von Tab. B.1

Design- point	$D_{AR}$ in mm	$d_{AR}$ in mm	$b_{AR}$ in mm	$b_K$ in mm	$d_T$ in mm	$D_{FL}$ in mm	$d_{FL}$ in mm	$b_{FL}$ in mm	Freilauf	Variierter Parameter	Bemerkung
19	100	75	44	25	87	160	67	34,5	Modell 1	$D_{FL}$	
20	100	75	44	25	87	180	67	34,5	Modell 1	$D_{FL}$	
21	100	75	44	25	87	200	67	34,5	Modell 1	$D_{FL}$	
22	100	75	44	25	87	250	67	34,5	Modell 1	$D_{FL}$	
23	100	75	44	25	87	300	67	34,5	Modell 1	$D_{FL}$	
24	100	75	44	25	87	400	67	34,5	Modell 1	$D_{FL}$	
25	100	75	44	25	87	500	67	34,5	Modell 1	$D_{FL}$	
26	100	75	44	25	87	150	10	34,5	Modell 1	$d_{FL}$	
27	100	75	44	25	87	150	30	34,5	Modell 1	$d_{FL}$	
28	100	75	44	25	87	150	40	34,5	Modell 1	$d_{FL}$	
29	100	75	44	25	87	150	50	34,5	Modell 1	$d_{FL}$	
30	100	75	44	25	87	150	60	34,5	Modell 1	$d_{FL}$	Referenz
31	100	75	44	25	87	150	67	34,5	Modell 1	$d_{FL}$	
32	100	75	44	25	87	150	70	34,5	Modell 1	$d_{FL}$	
33	100	75	44	25	87	150	74	34,5	Modell 1	$d_{FL}$	
34	100	75	44	10	87	150	67	34,5	Modell 1	$b_K$	
35	100	75	44	15	87	150	67	34,5	Modell 1	$b_K$	
36	100	75	44	20	87	150	67	34,5	Modell 1	$b_K$	
37	100	75	44	25	87	150	67	34,5	Modell 1	$b_K$	Referenz

Fortsetzung auf Folgeseite

Fortsetzung von Tab. B.1

Design-point	$D_{AR}$ in mm	$d_{AR}$ in mm	$b_{AR}$ in mm	$b_K$ in mm	$d_T$ in mm	$D_{FL}$ in mm	$d_{FL}$ in mm	$b_{FL}$ in mm	Freilauf	Variierter Parameter	Bemerkung
38	100	75	44	30	87	150	67	34,5	Modell 1	$b_K$	
39	100	75	44	35	87	150	67	34,5	Modell 1	$b_K$	
40	100	75	44	40	87	150	67	34,5	Modell 1	$b_K$	
41	105	75	35	25	90	150	67	10	Modell 2	$b_{FL}$	
42	105	75	35	25	90	150	67	20	Modell 2	$b_{FL}$	
43	105	75	35	25	90	150	67	25	Modell 2	$b_{FL}$	
44	105	75	35	25	90	150	67	34,5	Modell 2	$b_{FL}$	Referenz
45	105	75	35	25	90	150	67	50	Modell 2	$b_{FL}$	
46	105	75	35	25	90	150	67	80	Modell 2	$b_{FL}$	
47	105	75	35	25	90	150	67	100	Modell 2	$b_{FL}$	
48	105	75	35	25	90	150	67	150	Modell 2	$b_{FL}$	
49	105	75	35	25	90	150	67	300	Modell 2	$b_{FL}$	
50	105	75	35	25	90	150	67	500	Modell 2	$b_{FL}$	
51	105	75	35	25	90	150	67	1.000	Modell 2	$b_{FL}$	
52	105	75	35	25	90	106	67	34,5	Modell 2	$D_{FL}$	
53	105	75	35	25	90	110	67	34,5	Modell 2	$D_{FL}$	
54	105	75	35	25	90	120	67	34,5	Modell 2	$D_{FL}$	
55	105	75	35	25	90	130	67	34,5	Modell 2	$D_{FL}$	
56	105	75	35	25	90	140	67	34,5	Modell 2	$D_{FL}$	

Fortsetzung auf Folgeseite

Fortsetzung von Tab. B.1

Design- point	$D_{AR}$ in mm	$d_{AR}$ in mm	$b_{AR}$ in mm	$b_K$ in mm	$d_T$ in mm	$D_{FL}$ in mm	$d_{FL}$ in mm	$b_{FL}$ in mm	Freilauf	Variierter Parameter	Bemerkung
57	105	75	35	25	90	150	67	34,5	Modell 2	$D_{FL}$	Referenz
58	105	75	35	25	90	160	67	34,5	Modell 2	$D_{FL}$	
59	105	75	35	25	90	180	67	34,5	Modell 2	$D_{FL}$	
60	105	75	35	25	90	200	67	34,5	Modell 2	$D_{FL}$	
61	105	75	35	25	90	250	67	34,5	Modell 2	$D_{FL}$	
62	105	75	35	25	90	300	67	34,5	Modell 2	$D_{FL}$	
63	105	75	35	25	90	400	67	34,5	Modell 2	$D_{FL}$	
64	105	75	35	25	90	500	67	34,5	Modell 2	$D_{FL}$	
65	105	75	35	25	90	150	10	34,5	Modell 2	$d_{FL}$	
66	105	75	35	25	90	150	30	34,5	Modell 2	$d_{FL}$	
67	105	75	35	25	90	150	40	34,5	Modell 2	$d_{FL}$	
68	105	75	35	25	90	150	50	34,5	Modell 2	$d_{FL}$	
69	105	75	35	25	90	150	60	34,5	Modell 2	$d_{FL}$	
70	105	75	35	25	90	150	67	34,5	Modell 2	$d_{FL}$	Referenz
71	105	75	35	25	90	150	70	34,5	Modell 2	$d_{FL}$	
72	105	75	35	25	90	150	74	34,5	Modell 2	$d_{FL}$	
73	105	75	35	10	90	150	67	34,5	Modell 2	$b_K$	
74	105	75	35	15	90	150	67	34,5	Modell 2	$b_K$	
75	105	75	35	20	90	150	67	34,5	Modell 2	$b_K$	

Fortsetzung auf Folgeseite

Fortsetzung von Tab. B.1

Design- point	$D_{AR}$ in mm	$d_{AR}$ in mm	$b_{AR}$ in mm	$b_K$ in mm	$d_T$ in mm	$D_{FL}$ in mm	$d_{FL}$ in mm	$b_{FL}$ in mm	Freilauf	Variierter Parameter	Bemerkung
76	105	75	35	25	90	150	67	34,5	Modell 2	$b_K$	Referenz
77	105	75	35	30	90	150	67	34,5	Modell 2	$b_K$	
78	150	110	40	25	132	215	100	10	Modell 3	$b_{FL}$	
79	150	110	40	25	132	215	100	20	Modell 3	$b_{FL}$	
80	150	110	40	25	132	215	100	25	Modell 3	$b_{FL}$	Referenz
81	150	110	40	25	132	215	100	35	Modell 3	$b_{FL}$	
82	150	110	40	25	132	215	100	50	Modell 3	$b_{FL}$	
83	150	110	40	25	132	215	100	80	Modell 3	$b_{FL}$	
84	150	110	40	25	132	215	100	100	Modell 3	$b_{FL}$	
85	150	110	40	25	132	215	100	150	Modell 3	$b_{FL}$	
86	150	110	40	25	132	215	100	300	Modell 3	$b_{FL}$	
87	150	110	40	25	132	215	100	500	Modell 3	$b_{FL}$	
88	150	110	40	25	132	215	100	1.000	Modell 3	$b_{FL}$	
89	150	110	40	25	132	151	100	25	Modell 3	$D_{FL}$	
90	150	110	40	25	132	160	100	25	Modell 3	$D_{FL}$	
91	150	110	40	25	132	170	100	25	Modell 3	$D_{FL}$	
92	150	110	40	25	132	180	100	25	Modell 3	$D_{FL}$	
93	150	110	40	25	132	200	100	25	Modell 3	$D_{FL}$	
94	150	110	40	25	132	215	100	25	Modell 3	$D_{FL}$	Referenz

Fortsetzung auf Folgeseite



Fortsetzung von Tab. B.1

Design-point	$D_{AR}$ in mm	$d_{AR}$ in mm	$b_{AR}$ in mm	$b_K$ in mm	$d_T$ in mm	$D_{FL}$ in mm	$d_{FL}$ in mm	$b_{FL}$ in mm	Freilauf	Variierter Parameter	Bemerkung
95	150	110	40	25	132	250	100	25	Modell 3	$D_{FL}$	
96	150	110	40	25	132	300	100	25	Modell 3	$D_{FL}$	
97	150	110	40	25	132	400	100	25	Modell 3	$D_{FL}$	
98	150	110	40	25	132	500	100	25	Modell 3	$D_{FL}$	
99	150	110	40	25	132	600	100	25	Modell 3	$D_{FL}$	
100	150	110	40	25	132	750	100	25	Modell 3	$D_{FL}$	
101	150	110	40	25	132	215	15	25	Modell 3	$d_{FL}$	
102	150	110	40	25	132	215	30	25	Modell 3	$d_{FL}$	
103	150	110	40	25	132	215	50	25	Modell 3	$d_{FL}$	
104	150	110	40	25	132	215	70	25	Modell 3	$d_{FL}$	
105	150	110	40	25	132	215	80	25	Modell 3	$d_{FL}$	
106	150	110	40	25	132	215	90	25	Modell 3	$d_{FL}$	Referenz
107	150	110	40	25	132	215	100	25	Modell 3	$d_{FL}$	
108	150	110	40	25	132	215	105	25	Modell 3	$d_{FL}$	
109	150	110	40	25	132	215	109	25	Modell 3	$d_{FL}$	
110	150	110	40	10	132	215	100	25	Modell 3	$b_K$	
111	150	110	40	15	132	215	100	25	Modell 3	$b_K$	
112	150	110	40	20	132	215	100	25	Modell 3	$b_K$	
113	150	110	40	25	132	215	100	25	Modell 3	$b_K$	Referenz

Fortsetzung auf Folgeseite

Fortsetzung von Tab. B.1

Design- point	$D_{AR}$ in mm	$d_{AR}$ in mm	$b_{AR}$ in mm	$b_K$ in mm	$d_T$ in mm	$D_{FL}$ in mm	$d_{FL}$ in mm	$b_{FL}$ in mm	Freilauf	Variierter Parameter	Bemerkung
114	150	110	40	30	132	215	100	25	Modell 3	$b_K$	
115	150	110	40	35	132	215	100	25	Modell 3	$b_K$	
116	150	110	63	38	132	215	100	10	Modell 4	$b_{FL}$	
117	150	110	63	38	132	215	100	20	Modell 4	$b_{FL}$	
118	150	110	63	38	132	215	100	25	Modell 4	$b_{FL}$	Referenz
119	150	110	63	38	132	215	100	35	Modell 4	$b_{FL}$	
120	150	110	63	38	132	215	100	50	Modell 4	$b_{FL}$	
121	150	110	63	38	132	215	100	80	Modell 4	$b_{FL}$	
122	150	110	63	38	132	215	100	100	Modell 4	$b_{FL}$	
123	150	110	63	38	132	215	100	150	Modell 4	$b_{FL}$	
124	150	110	63	38	132	215	100	300	Modell 4	$b_{FL}$	
125	150	110	63	38	132	215	100	500	Modell 4	$b_{FL}$	
126	150	110	63	38	132	215	100	1.000	Modell 4	$b_{FL}$	
127	150	110	63	38	132	151	100	25	Modell 4	$D_{FL}$	
128	150	110	63	38	132	160	100	25	Modell 4	$D_{FL}$	
129	150	110	63	38	132	170	100	25	Modell 4	$D_{FL}$	
130	150	110	63	38	132	180	100	25	Modell 4	$D_{FL}$	
131	150	110	63	38	132	200	100	25	Modell 4	$D_{FL}$	
132	150	110	63	38	132	215	100	25	Modell 4	$D_{FL}$	Referenz

Fortsetzung auf Folgeseite

Fortsetzung von Tab. B.1

Design- point	$D_{AR}$ in mm	$d_{AR}$ in mm	$b_{AR}$ in mm	$b_K$ in mm	$d_T$ in mm	$D_{FL}$ in mm	$d_{FL}$ in mm	$b_{FL}$ in mm	Freilauf	Variierter Parameter	Bemerkung
133	150	110	63	38	132	250	100	25	Modell 4	$D_{FL}$	
134	150	110	63	38	132	300	100	25	Modell 4	$D_{FL}$	
135	150	110	63	38	132	400	100	25	Modell 4	$D_{FL}$	
136	150	110	63	38	132	500	100	25	Modell 4	$D_{FL}$	
137	150	110	63	38	132	600	100	25	Modell 4	$D_{FL}$	
138	150	110	63	38	132	750	100	25	Modell 4	$D_{FL}$	
139	150	110	63	38	132	215	15	25	Modell 4	$d_{FL}$	
140	150	110	63	38	132	215	30	25	Modell 4	$d_{FL}$	
141	150	110	63	38	132	215	50	25	Modell 4	$d_{FL}$	
142	150	110	63	38	132	215	70	25	Modell 4	$d_{FL}$	
143	150	110	63	38	132	215	80	25	Modell 4	$d_{FL}$	
144	150	110	63	38	132	215	90	25	Modell 4	$d_{FL}$	Referenz
145	150	110	63	38	132	215	100	25	Modell 4	$d_{FL}$	
146	150	110	63	38	132	215	105	25	Modell 4	$d_{FL}$	
147	150	110	63	38	132	215	109	25	Modell 4	$d_{FL}$	
148	150	110	63	10	132	215	100	25	Modell 4	$b_K$	
149	150	110	63	15	132	215	100	25	Modell 4	$b_K$	
150	150	110	63	20	132	215	100	25	Modell 4	$b_K$	
151	150	110	63	25	132	215	100	25	Modell 4	$b_K$	

Fortsetzung auf Folgeseite

Fortsetzung von Tab. B.1

Design-point	$D_{AR}$ in mm	$d_{AR}$ in mm	$b_{AR}$ in mm	$b_K$ in mm	$d_T$ in mm	$D_{FL}$ in mm	$d_{FL}$ in mm	$b_{FL}$ in mm	Freilauf	Variierter Parameter	Bemerkung
152	150	110	63	30	132	215	100	25	Modell 4	$b_K$	
153	150	110	63	35	132	215	100	25	Modell 4	$b_K$	
154	150	110	63	38	132	215	100	25	Modell 4	$b_K$	Referenz
155	150	110	63	40	132	215	100	25	Modell 4	$b_K$	
156	150	110	63	45	132	215	100	25	Modell 4	$b_K$	
157	150	110	63	50	132	215	100	25	Modell 4	$b_K$	
158	150	110	63	60	132	215	100	25	Modell 4	$b_K$	
159	100	75	44	25	87	101	74	100	Modell 1	optimale Geometrie	für feste Einspannung
160	105	75	35	25	90	106	74	100	Modell 2	optimale Geometrie	für feste Einspannung
161	150	110	40	25	132	151	109	150	Modell 3	optimale Geometrie	für feste Einspannung
162	150	110	63	38	132	151	109	150	Modell 4	optimale Geometrie	für feste Einspannung
163	100	75	44	25	87	101	74	10	Modell 1	optimale Geometrie	für lose Einspannung
164	105	75	35	25	90	106	74	10	Modell 2	optimale Geometrie	für lose Einspannung

Fortsetzung auf Folgeseite

Fortsetzung von Tab. B.1

Design-point	$D_{AR}$ in mm	$d_{AR}$ in mm	$b_{AR}$ in mm	$b_K$ in mm	$d_T$ in mm	$D_{FL}$ in mm	$d_{FL}$ in mm	$b_{FL}$ in mm	Freilauf	Variierter Parameter	Bemerkung
165	150	110	40	25	132	151	109	15	Modell 3	optimale Geometrie	für lose Einspannung
166	150	110	63	38	132	151	109	15	Modell 4	optimale Geometrie	für lose Einspannung

Tabellenende